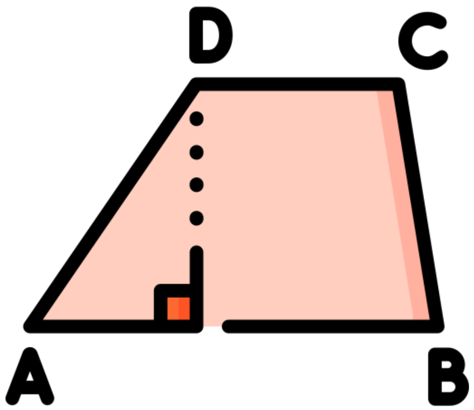


Решение задач №25 повышенной сложности ОГЭ по геометрии(трапеция)

Учителя математики МАОУ Школа «Перспектива»

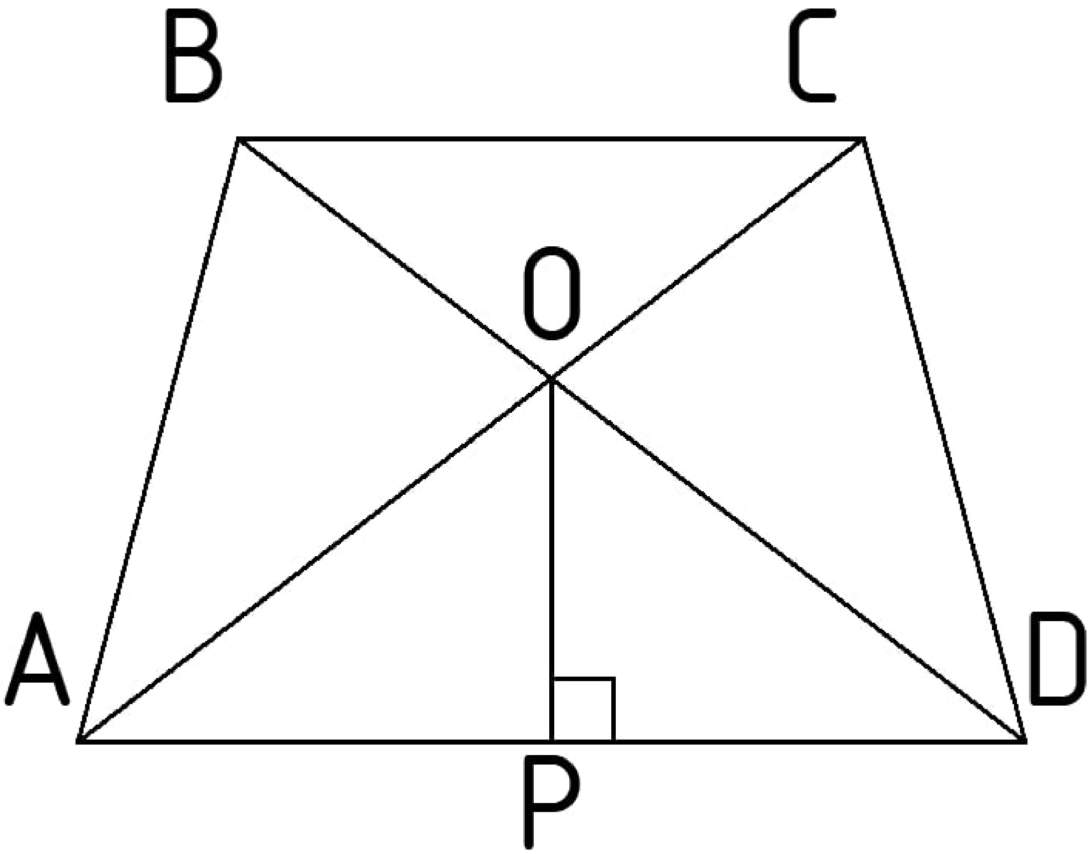
Жолоб Ольга Михайловна

Михальчук Надежда Леонидовна

Задача №1

В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.



Дано:

ABCD – р/б трапеция, в которую можно вписать окружность

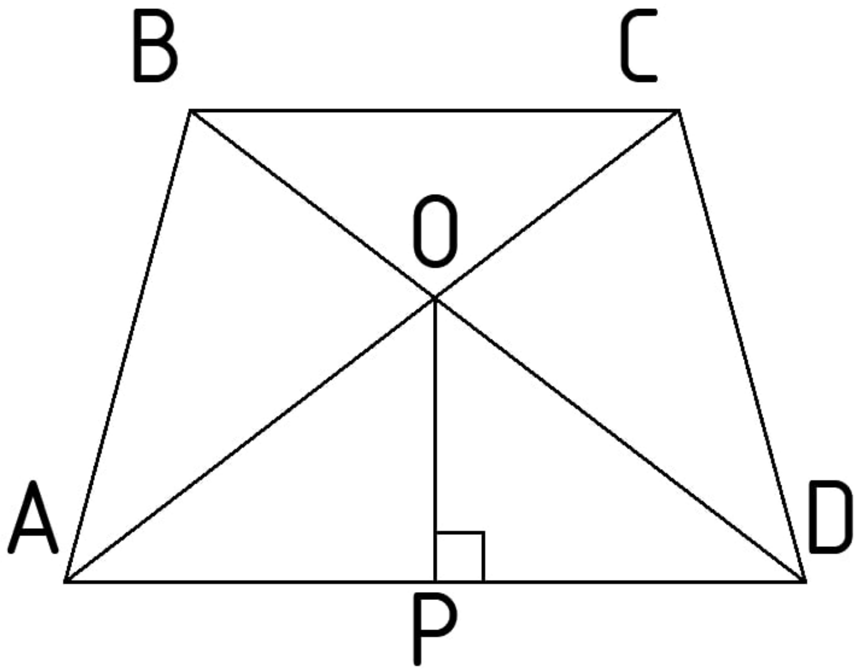
P=120

S=540

$AC \cap BD =$ т. O

$OP \perp AD$

Найти: OP

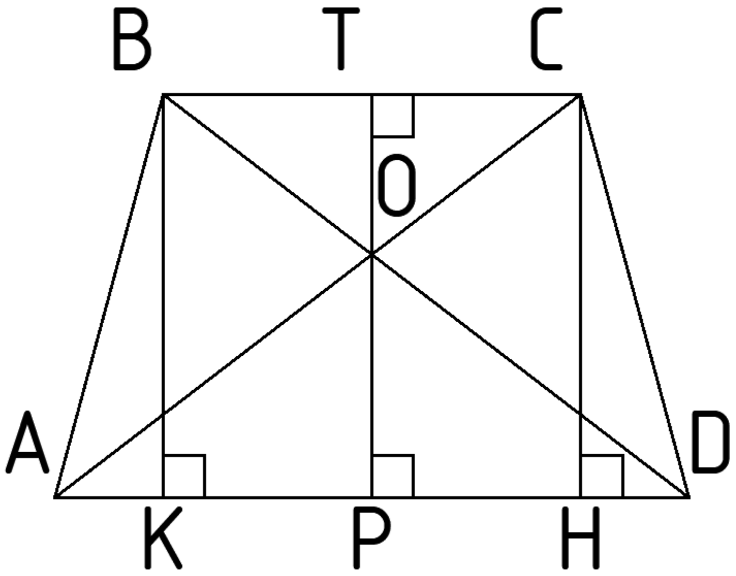


Решение:

1.По условию ABCD – трапеция,
в которую можно вписать окружность, следовательно
по свойству описанного четырехугольника суммы длин
противоположных сторон равны
AB+CD =BC+AD,
по условию трапеция ABCD- равнобедренная,
AB=CD,
следовательно 2AB=BC+AD

2. Периметр трапеции - сумма длин всех сторон:
P= AB + BC+CD+AD, так как AB=CD по условию, то P=2AB + BC+AD и 2AB=BC+AD, получаем P=4AB и находим AB=P/4=120/4=30

3. Найдем сумму сторон BC+ AD=2AB=60



4.Площадь трапеции можно найти как произведение полусуммы оснований на высоту:

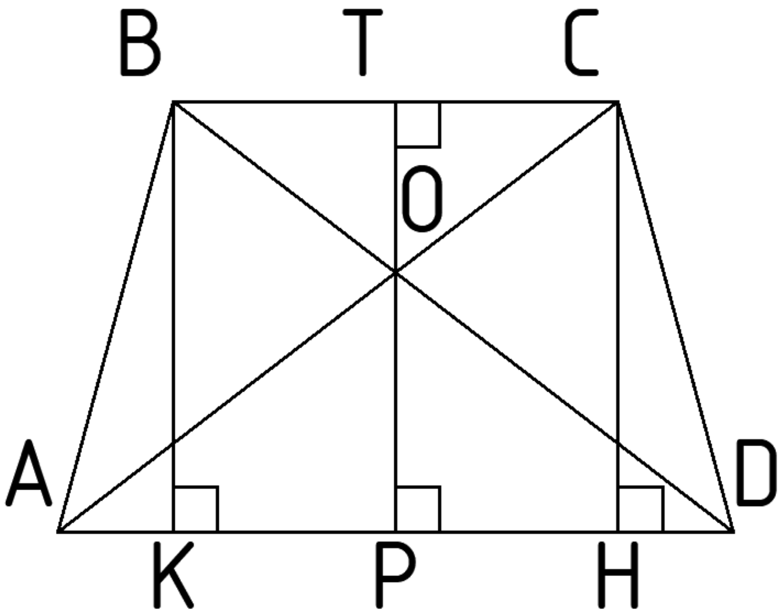
$$S = \frac{BC+AD}{2} * TP, \quad TP = \frac{2S}{BC+AD}, \quad TP = \frac{2*540}{60} = 2*9 = 18$$

5.Проведем высоты трапеции из точек B, C и через т. O, BK=TP=CH как расстояния между параллельными прямыми AD и BC .

6.Из прямоугольного треугольника CHD по теореме Пифагора найдём HD:

$$HD = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{900 - 324} = 24.$$

7.Рассмотрим прямоугольные треугольники *ABK* и *CHD*:
***AB* =*CD*, *BK* =*CH*.** Треугольники *ABK* и *CHD* равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, прямые **BK $\perp$ AD** и **CH $\perp$ AD** ,
поэтому параллельны **BK $||$ CH**, а так как **BK = CH**, то по признаку параллелограмма , четырёхугольник **BCHK** — параллелограмм.



8. Выразим длину отрезка AD:

AD =AK+KH+HD, AK=HD, KH=BC

AD=2HD+BC, AD- BC= 2HD

9.Получаем систему уравнений для отрезков AD и BC

$$\begin{cases} AD + BC = 60 \\ AD - BC = 48 \end{cases}$$

Решим сложением систему уравнений и получим 2D=108, AD = 54 и ,подставив в уравнение(1), найдем

BC=60-54=6

$$\begin{cases} BC = 6 \\ AD = 54 \end{cases}$$

10.Рассмотрим $\Delta\, AOD$ и ΔBOC:

$\angle$CAD=$\angle$ BCA (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC),

$\angle BOC = \angle\ AOD$ (как вертикальные),

следовательно, треугольники$\Delta\, AOD$ и ΔBOC подобны по двум углам.

Из подобия треугольников

$$\frac{\mathrm{BC}}{AD} = \frac{OT}{OP} = \frac{6}{54} = \frac{1}{9}$$

OP=9OT

Высота TP=OT+OP=OT+9OT=10 OT=18

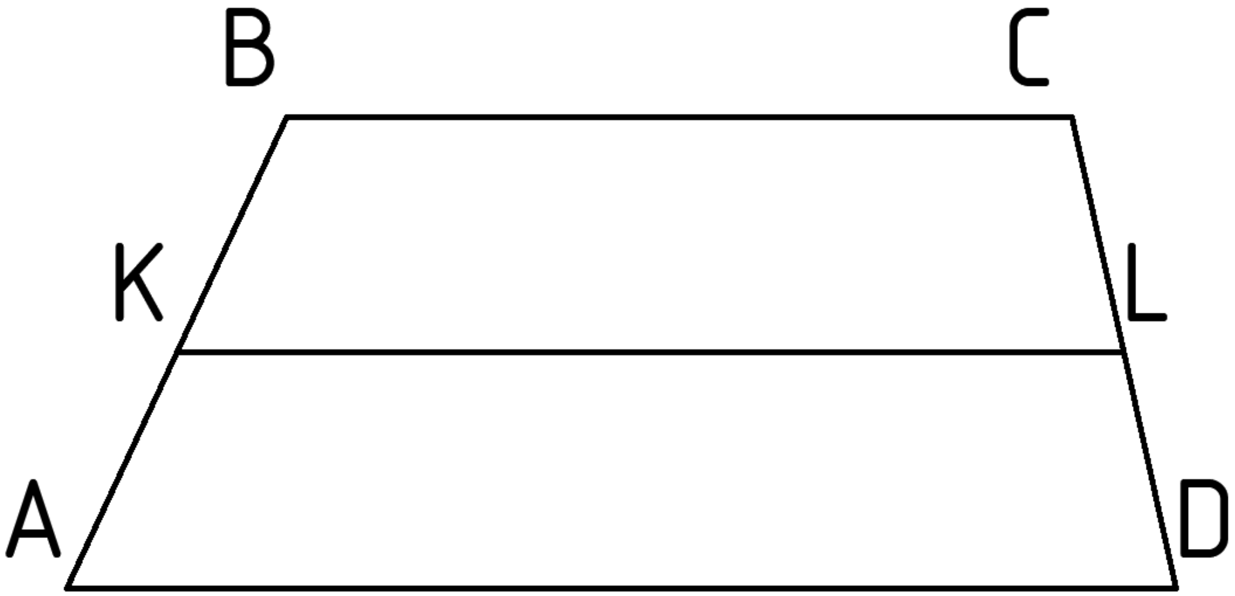
OT=1,8

ОТВЕТ: 1,8

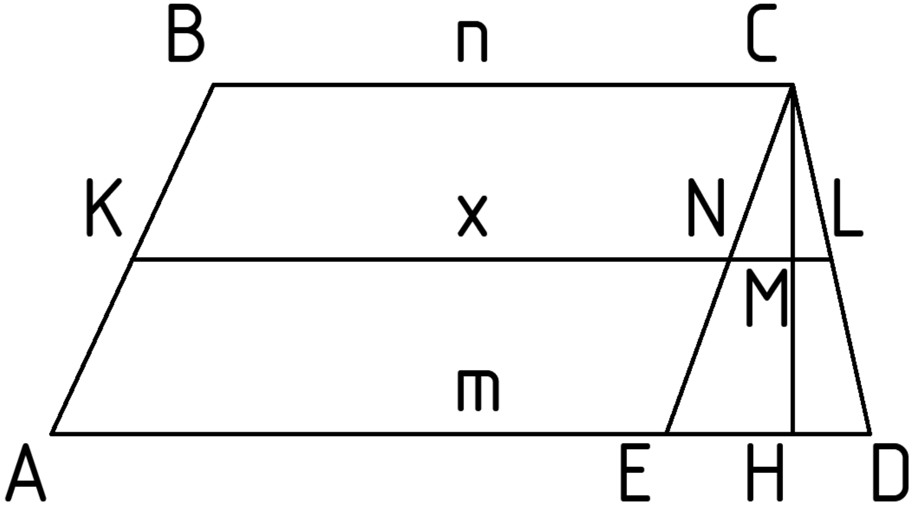
Задача №2

В трапеции проведен отрезок, параллельный основаниям и делящий ее на две трапеции одинаковой площади. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны $24\sqrt{2}$ и $7\sqrt{2}$.

В трапеции проведен отрезок, параллельный основаниям и делящий ее на две трапеции одинаковой площади. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны $24\sqrt{2}$ и $7\sqrt{2}$



Дано:
ABCD-трапеция
KL││AD││BC
AD=$24\sqrt{2}$ см
BC=7 $\sqrt{2}$ см
S_{AKLD}=S_{KDCL}
Найти: KL



Решение:

1.Введем обозначения: AD=m, BC=n, KL=x.
Опустим из точки C высоту CH. Проведем отрезок CE $||$AB.

2.Составим выражения для вычисления площади полученных трапеций

$S_{ABCD} = \frac{\boldsymbol{BC}+\mathbf{AD}}{\mathbf{2}} * \mathbf{CH}$

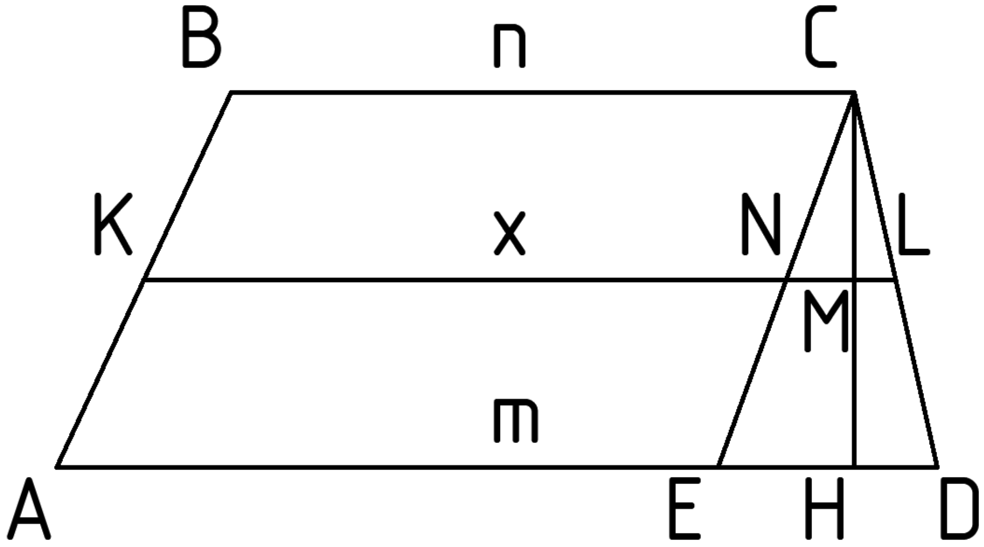
$S_{AKLD} = \frac{\boldsymbol{KL}+\mathbf{AD}}{\mathbf{2}} * \mathbf{MH}$ и $S_{KBCL} = \frac{\boldsymbol{KL}+\boldsymbol{BC}}{\mathbf{2}} * \mathbf{CM}$

Так как S_{AKLD}=S_{KDCL},то S_{ABCD}=2S_{AKLD} и ,учитывая введенные нами выше обозначения, составим равенство:

$\frac{\mathrm{BC}+\mathrm{A}\boldsymbol{D}}{2}$ ***CH=** $\frac{\mathbf{2}(\boldsymbol{KL}+\boldsymbol{BC})}{2}$ ***CM** $\frac{\boldsymbol{x}+\mathrm{y}}{2}$ ***CH=** $\frac{\mathbf{2}(\mathrm{x}+\boldsymbol{n})}{2}$ ***CM**

или

2(x+n) *CM=(x+y) *CH



3. Рассмотрим Δ NCL и Δ ECD:

$\angle CNL = \angle CED$ (как соответственные при параллельных прямых AD и BC и секущей CE), $\angle C$-общий. Следовательно, треугольники Δ NCL и Δ ECD подобны по двум углам.

Из подобия треугольников Δ NCL и Δ ECD следует

$$\frac{CM}{CH} = \frac{NL}{ED} = \frac{x-n}{m-n}$$

$$CM = \frac{x-n}{m-n} * CH$$

4. Подставим в равенство 2(x+n) *CM=(x+y) *CH выражение для CM

$$2\,(x+n) * \frac{x-n}{m-n} * CH = (m+n) * CH.$$

Разделим обе части равенства на CH

$$\frac{2(x+n)(x-n)}{m-n} = m+n \quad \text{или} \quad \frac{2(x^2-n^2)}{m-n} = m+n$$

Тогда $x^2 - n^2 = \frac{m^2-n^2}{2}$ и $x^2 = \frac{m^2-n^2}{2} + n^2 = \frac{m^2+n^2}{2}$

$x = \sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$; $KL = \sqrt{\frac{(7\sqrt{2})^2+(24\sqrt{2})^2}{2}} = \sqrt{\frac{2*49+2*576}{2}} =$

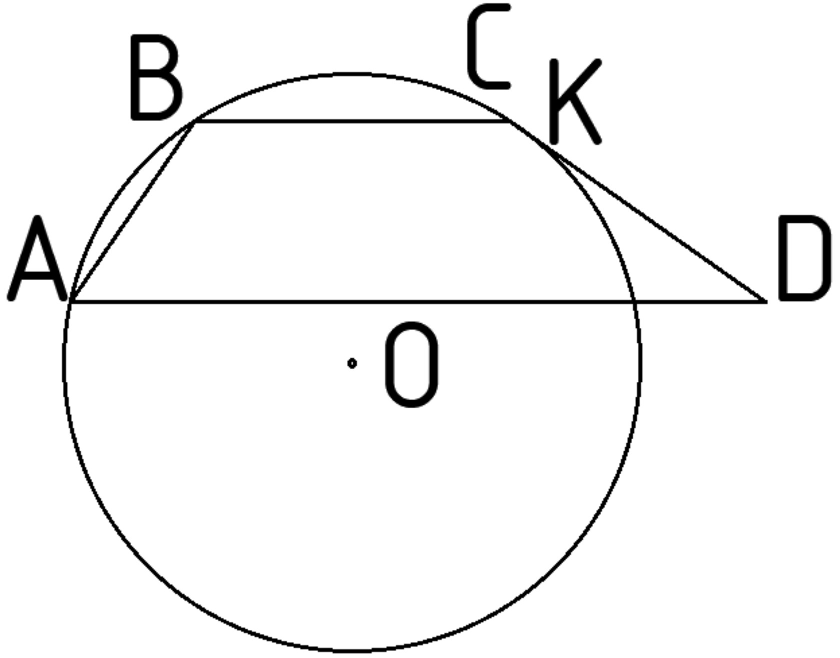
$= \sqrt{\frac{2*(49+576)}{2}} = \sqrt{625} = 25$, **KL=25 см**

Ответ:25 см

Задача №3

В трапеции ABCD основания AD и BC равны соответственно 34 и 14, а сумма углов при основании AD равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если AB=12.

В трапеции АВСД основания АД и ВС равны соответственно 34 и 14, а сумма углов при основании АД равна 90º. Найдите радиус окружности, проходящей через точки А и В и касающейся прямой СД, если АВ=12.



Дано:

АВСД-трапеция

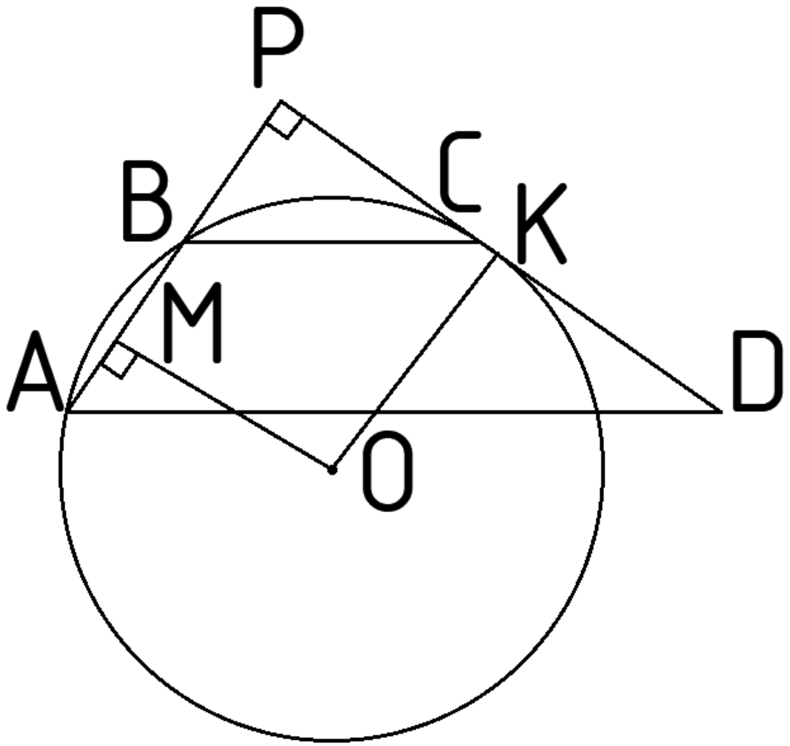
$\angle A + \angle Д = 90^{0}$

Основания АД=34, ВС=14

АВ=12

Окр(О;R) $\cap$ АВСД в т.А и т.В и касается СД в т.К

Найти: R



Решение:

1) Д.П. проведем $AB \cap CД$= т.P

Т.к $\angle A + \angle Д = 90^0 \Rightarrow \angle P = 180^0 - (\angle A + \angle Д) = 180^0 - 90^0 = 90^0 \Rightarrow \Delta$АРД-прямоугольный $\Rightarrow AP \perp PД$

2)Рассмотрим ΔBPC и $\Delta AРД$:

$\angle$P-общий, $\angle$PBC=$\angle$PAД-соотв. при BC II AД и сек. AP $\Rightarrow$ $\Delta BPC \sim \Delta AРД$ по двум углам. $\Rightarrow$

$\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AД}$ и т.к. AP=AB+BP=12+BP $\Rightarrow \frac{BP}{BP+12} = \frac{14}{34} \Rightarrow$ 14(BP+12)=34BP $\Rightarrow$ BP=8,4

3)Т. к OK-радиус, проведённый в точку касания $\Rightarrow OK \perp PД \Rightarrow \angle OKP = 90^0$

Д.П. проведём $OM \perp AP$. Т. к $\angle OKP = 90^0$, $OM \perp AP$, $\angle P = 90^0$ $\Rightarrow$ OMPK-прямоугольник $\Rightarrow$ OK=MP.

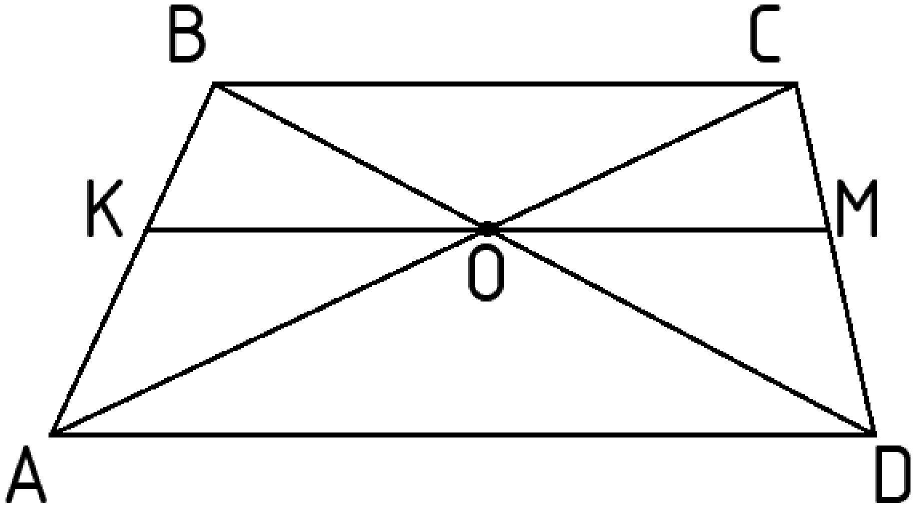
4)ΔAOB-р/б, т.к. OB=OA=R $\Rightarrow$ OM-высота и медиана $\Rightarrow$ BH=1/2 AB=6 $\Rightarrow$ MP=MB+BP=14,4 $\Rightarrow$ =OK=14,4

Ответ: R=14,4

Задача №4

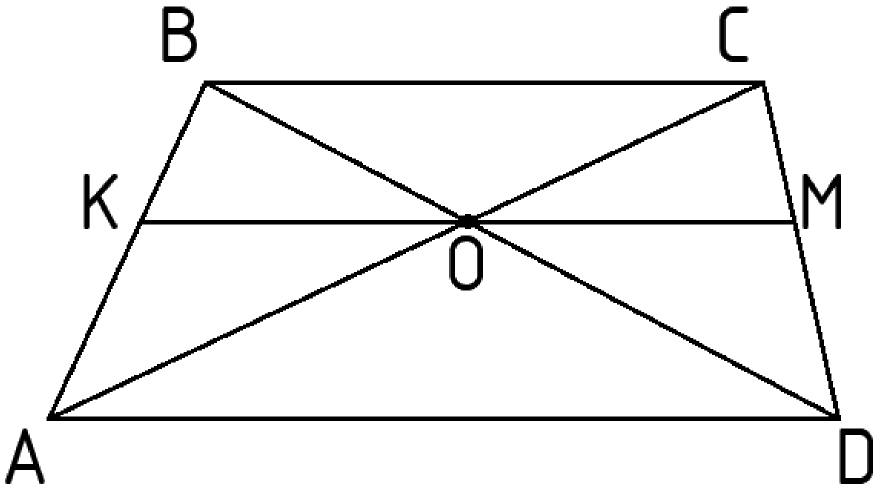
Основания трапеции относятся как 3:7. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?

Основания трапеции относятся как 3:7. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. В каком отношении эта прямая делит площадь трапеции?



Дано: АВСД-трапеция
Основания ВС: АД=3:7
Диагонали ВД $\cap$ АС= т. О
т. О $\in$КМ, КМ II АД, КМ II ВС

Найти : $\dfrac{S\,KBCM}{S\,AKMД}$ -?



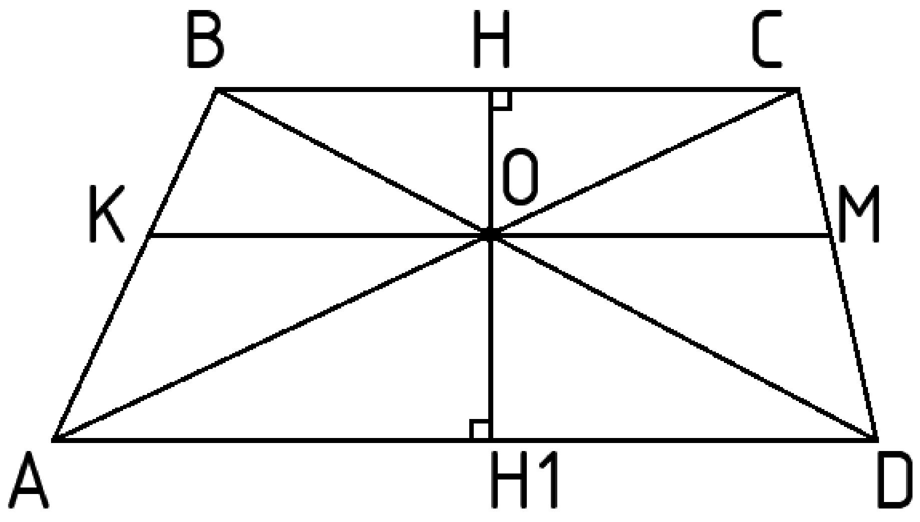
Решение:

1) Т.к. ВС:АД=3:7$\Rightarrow$обозначим ВС=3х, АД=7х.

2) Рассмотрим ΔВОС и ΔАОД:
$\angle$ВОС=$\angle$АОД-вертикальные
$\angle$ВСО=$\angle$ОАД- накрест лежащие при ВС II АД и секущей АС$\Rightarrow\Delta$ВОС ~ ΔАОД
по 2 углам. $\Rightarrow \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{BC}{АД} = \dfrac{3}{7}$.
Пусть СО=3у, ОА=7у, тогда АС=СО+ОА=3у+7у=10у

3) Рассмотрим ΔОСМ и ΔАСД:
$\angle$АСД-общий,
$\angle$СОМ=$\angle$САД- соответственные при КМ II АД и секущей АС$\Rightarrow\Delta$ОСМ ~ ΔАСД по 2 углам. $\Rightarrow \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{OM}{АД} \Rightarrow$ ОМ=$\dfrac{CO \cdot АД}{CA} = \dfrac{3y \cdot 7x}{10y} = 2{,}1x$

4) Аналогично рассмотрим ΔКАО и ΔВАС:
$\angle$ВАС-общий,
$\angle$КОА=$\angle$ВСА- соответственные при КМ ll ВС и секущей АС$\Rightarrow\Delta$ КАО ~ Δ ВАС
по 2 углам. $\Rightarrow \dfrac{KO}{BC} = \dfrac{AO}{AC} \Rightarrow$
КО=$\dfrac{BC \cdot AO}{CA} = \dfrac{3x \cdot 7y}{10y} = 2{,}1x \Rightarrow$КМ=2,1х+2,1х=4,2х



5) Д. п. проведём через т. O высоту $HH_1 \perp$ основаниям BC и АД, т.к. KM ll BC и KM ll АД $\Rightarrow$ 1)$HH_1 \perp KM$

2)OH-высота ΔOBC и OH_1-высота $\Delta AOД$

3) OH-высота трапеции KBCM и OH_1-высота трапеции AKMД.

6) Из $\Delta BOC \sim \Delta AOД \Rightarrow \dfrac{OH}{OH_1} = \dfrac{3}{7}$. Пусть OH=3z, OH_1=7z, тогда

S KBCM=$\dfrac{BC+KM}{2} \cdot OH = \dfrac{3x+4{,}2x}{2} \cdot 3z$, S AKMД=$\dfrac{AД+KM}{2} \cdot OH_1 = \dfrac{7x+4{,}2x}{2} \cdot 7z$

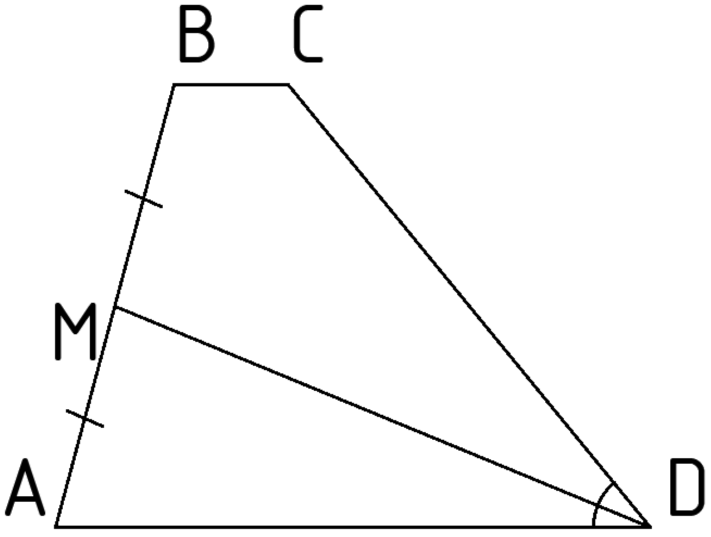
$\Rightarrow \dfrac{S\,KBCM}{S\,AKMД} = \dfrac{3x+4{,}2x}{2} \cdot 3z : \dfrac{7x+4{,}2x}{2} \cdot 7z = \dfrac{7{,}2 \cdot 3}{11{,}2 \cdot 7} = \dfrac{27}{98}$

Ответ: $\dfrac{S\,KBCM}{S\,AKMД} = \dfrac{27}{98}$.

Задача №5

Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 24 и 30, а основание BC равно 6. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 24 и 30, а основание BC равно 6. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.



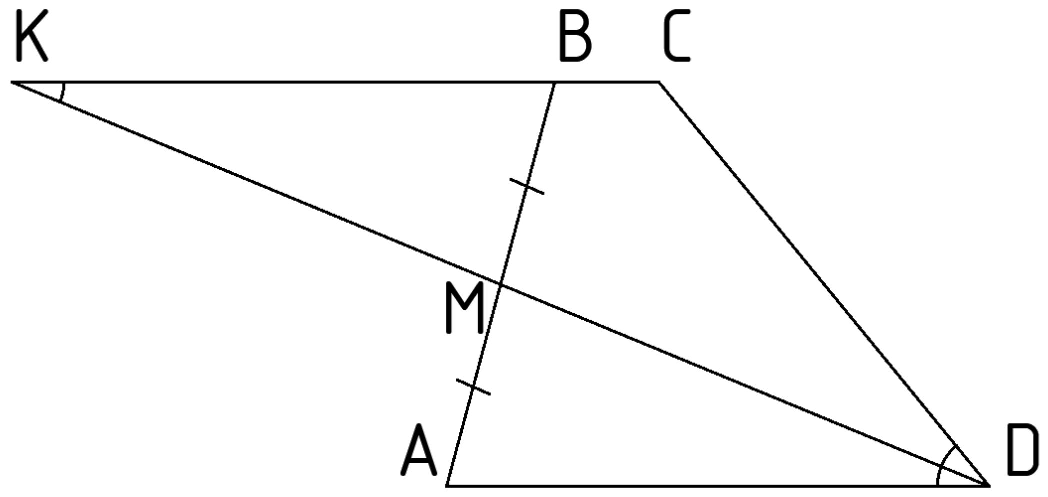
Дано: АВСД-трапеция,

АВ=24, СД=30, ВС=6,

ДМ-биссектриса $\angle$АДС,

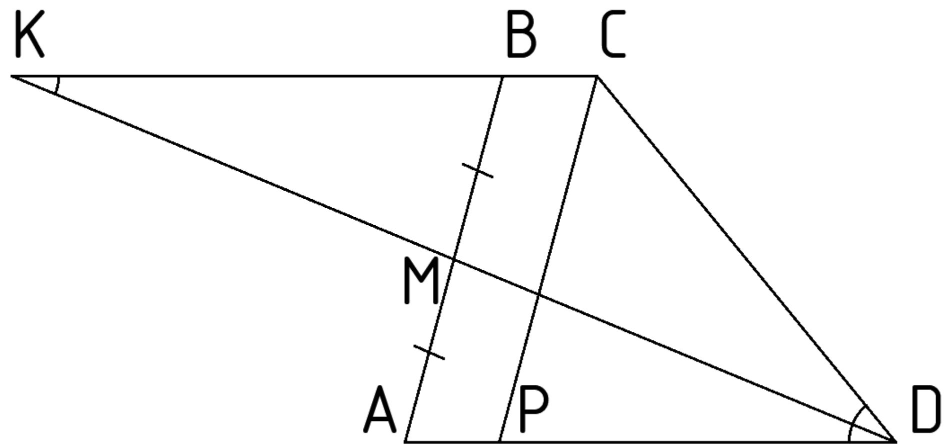
т.М-середина АВ

Найти: S АВСД.



Решение:

1) Д.п. AM∩BC в т.К
2) Т.к. ДМ-биссектриса ∠АДС ⇒ ∠СДК=∠КДА;
   ∠СКД=∠КДА-накрест лежащие при ВС || АД и секущей КД⇒
   ∠СДК=∠СКД⇒ΔКСД-равнобедренный⇒КС=СД=30.
   КВ=КС-ВС=30-6=24.
3) Рассмотрим ΔКВМ и ΔДАМ:
   МВ=МА(дано), ∠ КМВ =∠АМД-вертикальные, ∠КВМ=∠МАД-накрест лежащие при ВС || АД и секущей КД⇒ΔКВМ = ΔДАМ по 2 признаку⇒АД=КВ=24



4) Д.п. СР || АВ $\Rightarrow$ получили АВСР-параллелограмм(АВ||СР и ВС||АД-основания трапеции) и Δ РСД $\Rightarrow$ S АВСД=S АВСР + S Δ РСД.
Т.к. АВСР-параллелограмм $\Rightarrow$ АВ=СР=24; АР=ВС=6 $\Rightarrow$ РД=АД-АР=24-6=18.

5) $\frac{P}{2}\Delta$ РСД $= \frac{СР+СД+РД}{2} = \frac{24+30+18}{2} = 36$.
По формуле Герона S Δ РСД= $\sqrt{36(36-24)(36-30)(36-18)} = 216$
А также S Δ РСД= $\frac{1}{2}h \cdot$ РД, h-высота проведенная к РД (т.к. РД $\in$ АД, основания трапеции ВС||АД $\Rightarrow h \perp$ АД, $h \perp$ ВС) $\Rightarrow$
h= 2S Δ РСД:РД=432:18=24. Т.К. h=АВ $\Rightarrow$ трапеция АВСД-прямоугольная.

6) S АВСД= $\frac{ВС+АД}{2}h = \frac{6+24}{2} \cdot 24 = 360$.
Ответ: S АВСД=360.