РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ОГЭ ПО ГЕОМЕТРИИ

части С

Лектор - учитель математики МБОУ РКГ №2   Борисова Наталья Васильевна

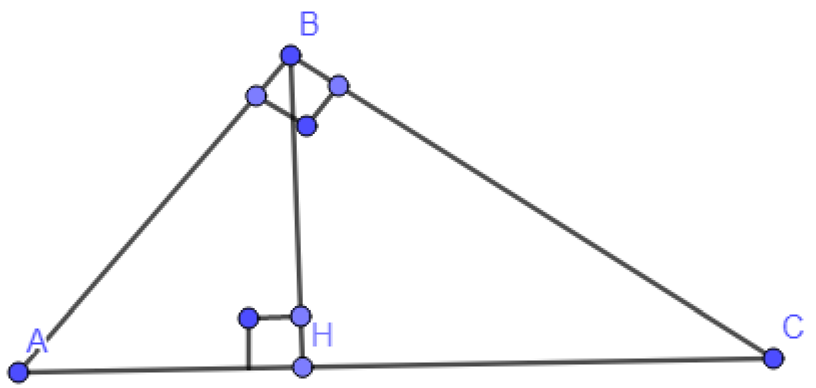
23. ТОЧКА H ЯВЛЯЕТСЯ ОСНОВАНИЕМ ВЫСОТЫ, ПРОВЕДЕННОЙ ИЗ ВЕРШИНЫ ПРЯМОГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА ABC К ГИПОТЕНУЗЕ AC. НАЙДИТЕ AB, ЕСЛИ AH=9, AC = 36

Дано: ΔABC – прямоугольный,

BH- высота, $< B = 90$

AH=9,AC=36.

Найдите: AB=?



Решение. 1 способ.

1. По свойству высоты, проведенной из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, катет есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.
2. AB=$\sqrt{AC \cdot AH}$=$\sqrt{36 \cdot 9} = 6 \cdot 3 = 18.$ Ответ: $AB = 18.$

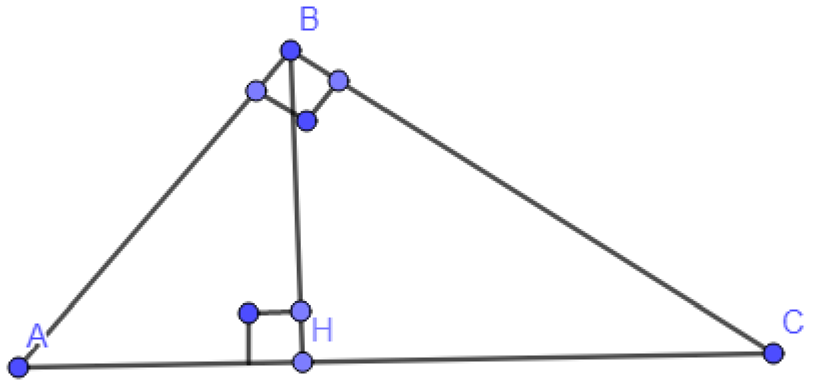
23. ТОЧКА Н ЯВЛЯЕТСЯ ОСНОВАНИЕМ ВЫСОТЫ, ПРОВЕДЕННОЙ ИЗ ВЕРШИНЫ ПРЯМОГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА АВС К ГИПОТЕНУЗЕ АС. НАЙДИТЕ АВ, ЕСЛИ АН=9, АС = 36

Дано: ΔABC – прямоугольный,

ВН- высота, $< B =$ **90**

АН=9,АС=36.

Найдите: АВ=?



Решение. 2 способ.

Рассмотрим ΔABC и ΔABH.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ < A - \text{общий}, \\ \\ 2.\ < AHB =< ABC = 90 \end{array}\right] \text{Следовательно} : \Delta ABC \sim \Delta ABH \text{ (по двум углам)},$$

Тогда $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$.

Отсюда $AB^2 = AC \cdot AH = 36 \cdot 9, AB = \sqrt{36 \cdot 9} = 6 \cdot 3 = 18.$

Ответ: $AB = 18.$

23.

В прямоугольном треугольнике с прямым углом С известны катеты: АС = 6, ВС = 8. Найдите медиану СК этого треугольника.

Дано:

ΔABC

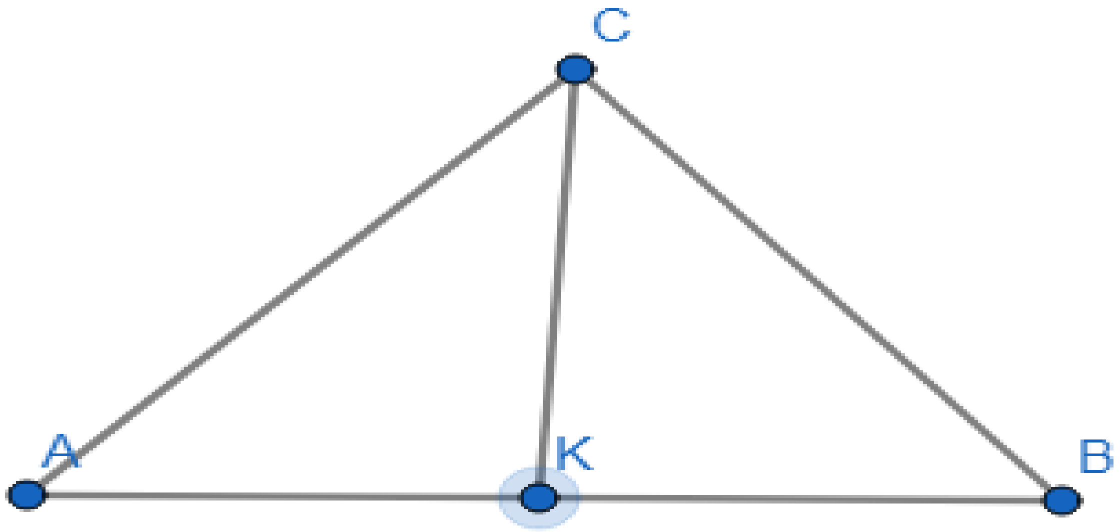
$< C = 90$

АС=6

ВС=8

СК- медиана

Найти: СК=?



23. **Дано:**

ΔABC

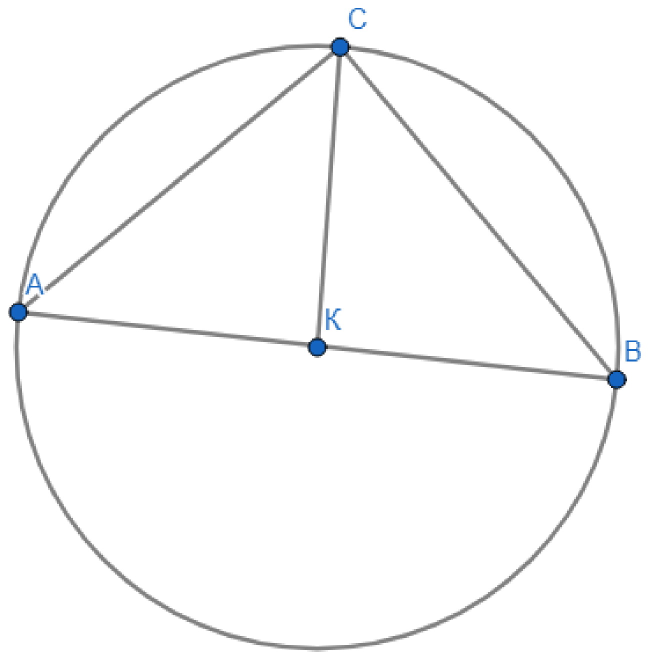
$< C = 90$

AC=6

BC=8

CK- медиана

Найти: CK=?



Решение:

Так как около любого треугольника можно описать окружность.

Опишем окружность около ΔABC. Тогда <ACB – будет вписанный и его градусная мера = 90.Следовательно, AB – диаметр окружности. По определению медианы AK=KB, тогда K центр описанной окружности. Следовательно CK = AK=KB =R-радиус описанной окружности. Тогда CK=$\frac{1}{2}$AB.

Найдем AB по теореме Пифагора. $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$. Отсюда CK= $\frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.

Ответ: CK=5

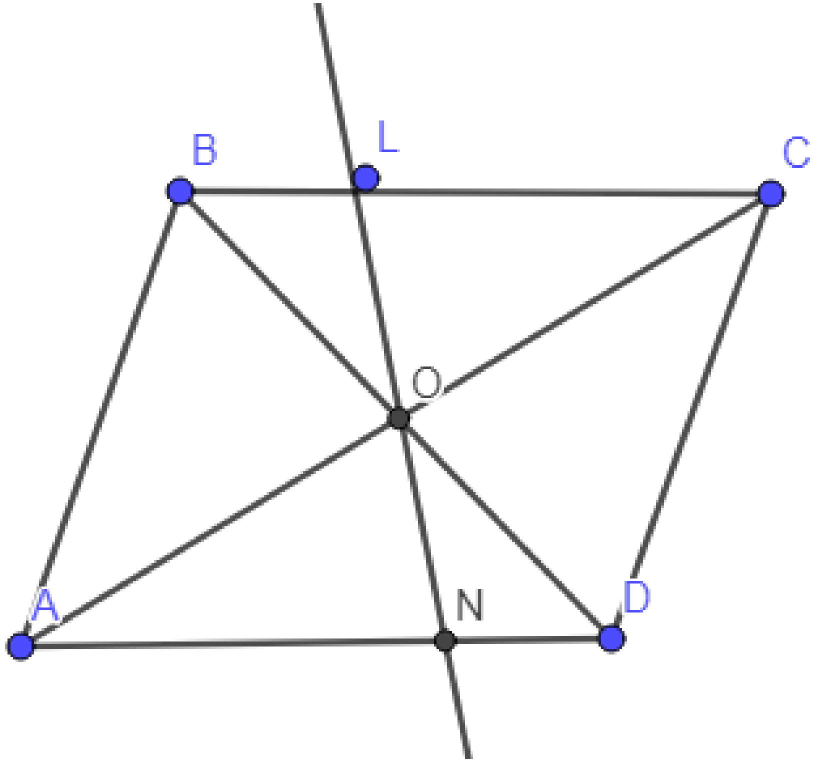
24.ЧЕРЕЗ ТОЧКУ О ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДИАГОНАЛЕЙ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА ABCD ПРОВЕДЕНА ПРЯМАЯ, ПЕРЕСЕКАЮЩАЯ СТОРОНЫ BC И AD В ТОЧКАХ L И N СООТВЕТСТВЕННО. ДОКАЖИТЕ, ЧТО ОТРЕЗКИ CL И AN РАВНЫ.

Дано: ABCD –параллелограмм,
$BD \cap AC$ в точке O.

LN$\cap$ BC в точке L,

LN$\cap$ AD в точке N

Докажите: что CL=AN.



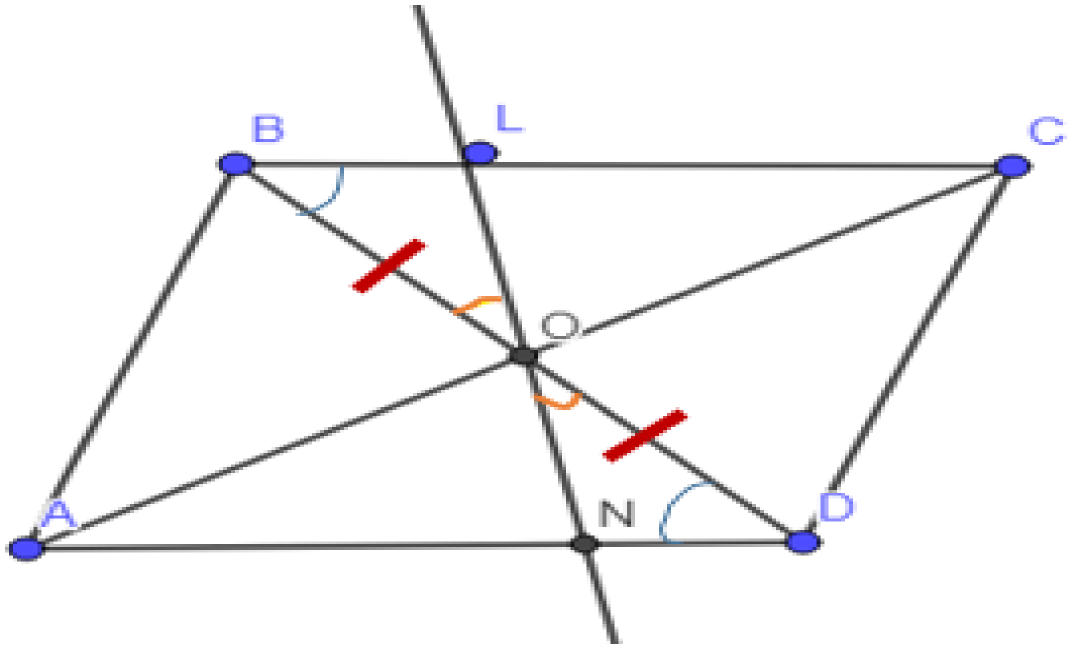
24.

Дано: ABCD –параллелограмм,
$\boldsymbol{BD \cap AC}$ в точке $\boldsymbol{O}$.

LN$\boldsymbol{\cap BC}$ в точке $\boldsymbol{L}$,

LN$\boldsymbol{\cap AD}$ в точке $\boldsymbol{N}$

Докажите: что BL=DN.



Доказательство: Рассмотрим ΔBOL и ΔNOD.

1. BO $= OD$ – так как, диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
2. $< LBO =< NDO$ как внутренние накрест лежащие при $BC||AD$ – как противолежащие стороны параллелограмма и секущей BD;
3. $< BOL =< NOD$ – как вертикальные.

$\Rightarrow$ $\Delta BOL = \Delta DON$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

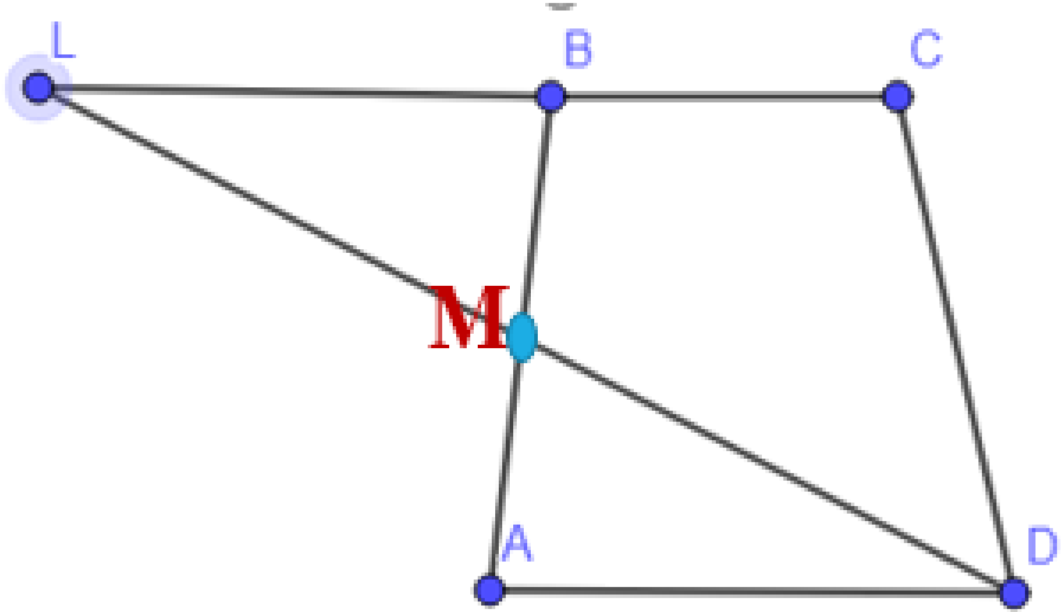
В равных треугольниках соответственные элементы равны, тогда

DN=BL ч.т.д

№25

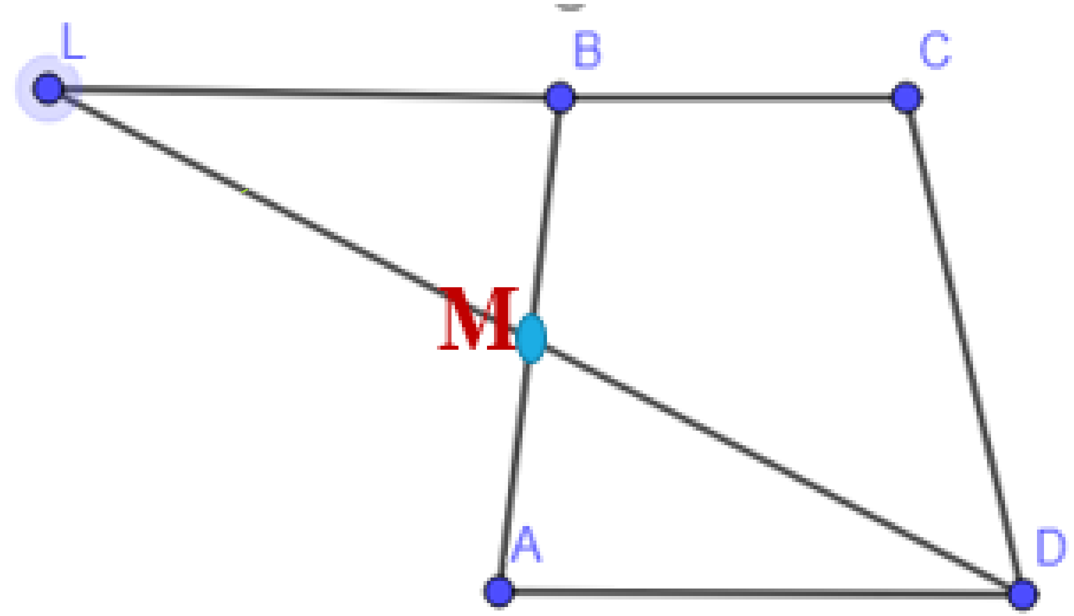
Боковые стороны AB и CD трапеции ABCD равны соответственно 40 и 41, а основание BC равно 16. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Дано: ABCD – трапеция,
BC и AD – основания.
BC=16,
DL- биссектриса ,
M- середина AB.
Найти:$S_{ABCD} = ?$



№25

Дано: ABCD – трапеция,
BC и AD – основания.
BC=16,
DL- биссектриса ,
M- середина AB.
Найти:S_{ABCD} = ?



Решение: 1. Продолжим биссектрису DL до пересечения с основанием BC. Получим точку L.

2. Рассмотрим ΔLBM и ΔDAM.

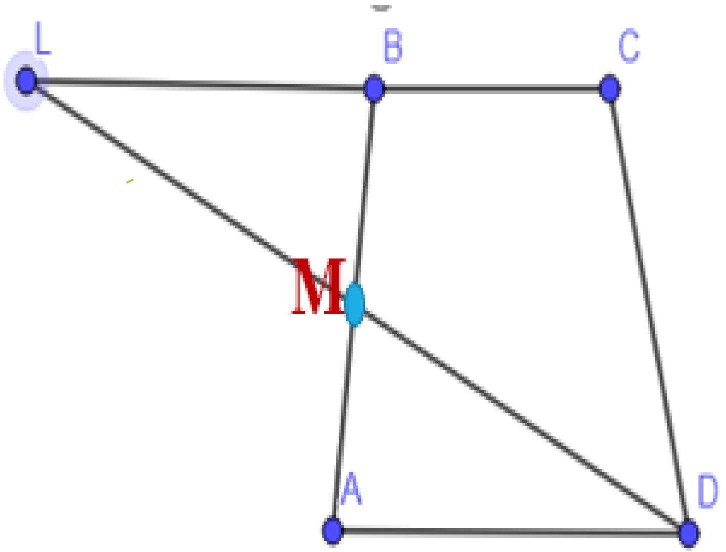
а) $< LBM =< MAD$ как внутренние накрест лежащие при $BC||AD$ (по определению трапеции) и секущей AB;

б) $< LMB =< DMA$ – как вертикальные;

в) BM=MA по условию.

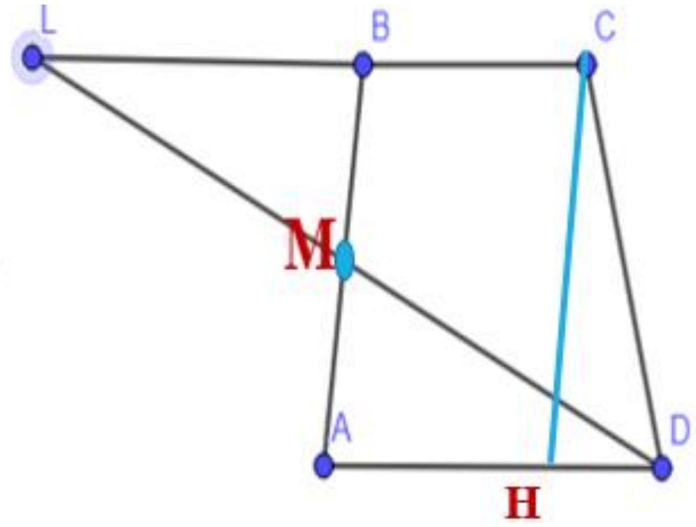
Из пунктов а), б), в) – получаем, что $\Delta LBM = \Delta DAM$ – по стороне и двум прилежащим к ней углам.

№25 Решение: Продолжение.



Из пунктов а), б), в) – получаем, что $\Delta LBM = \Delta DAM$ – по стороне и двум прилежащим к ней углам.
В равных треугольниках соответственные элементы равны, следовательно, LB=AD.
3. Рассмотрим $\Delta LCD,$ т. к. DL биссектриса, то $< CDM =< MDA$ и $< BLM =< MDA$ $-$как внутренние накрестлежащие при LC||AD(так основания трапеции параллельны друг другу по определению)и секущей DL. Отсюда $< CDM = < BLM$.
Следовательно, ΔLCD $-$ равнобедренный и LC = CD=41, тогда LB=AD=41-16 =25.

№4 Решение: Продолжение.



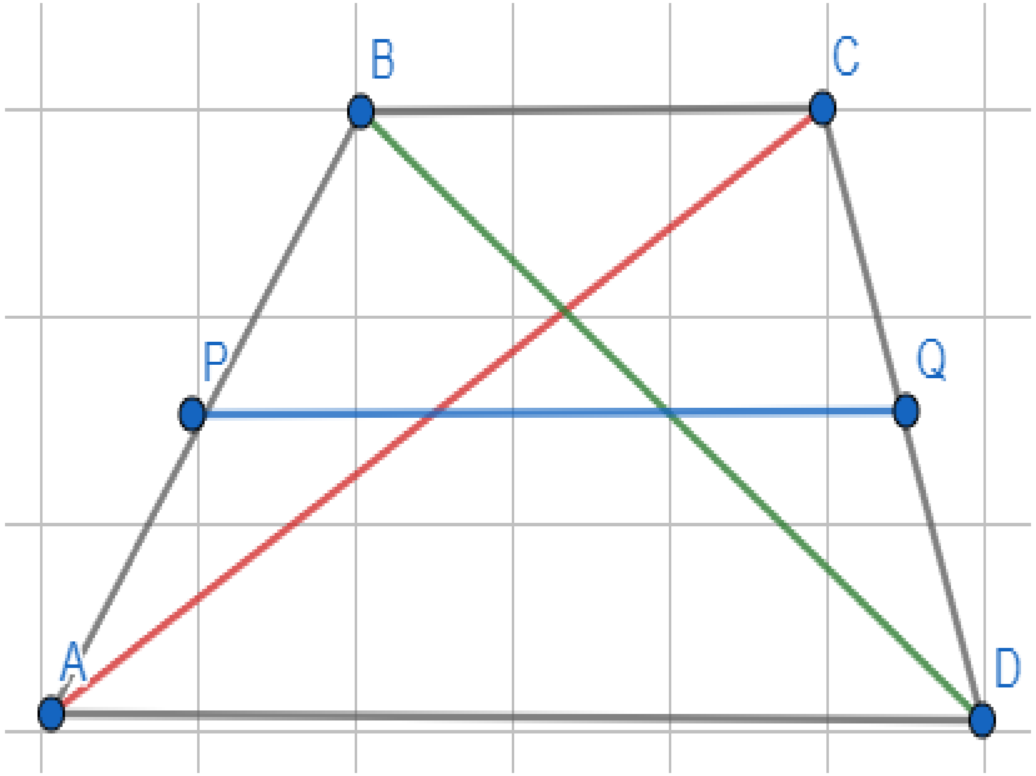
4. Проведем прямую CH || AB по построению 4-к ABCH- параллелограмм, тогда BA=CH=40 и BC=AH=16, отсюда DH=25-16=9.

5. Рассмотрим ΔCHD. По теореме обратной теореме Пифагора заметим, что если $CD^2 = CH^2 + HD^2, 41^2 = 40^2 + 9^2$, 1681=1600+81, 1681=1681 – квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный. Отсюда ΔCHD- прямоугольный, где CH – катет, следовательно CH – перпендикулярно AD, тогда и AB перпендикулярно AD. Следовательно AB=CH=40 и CH- высота трапеции ABCD.

6. $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot CH, S_{ABCD} = \frac{16+25}{2} \cdot 40 = 41 \cdot 20 = 820.$ Ответ: 820.

25. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 15 и 7, а средняя линия равна 10.

Дано: ABCD- трапеция,
AC и BD – диагонали,
AC=15, BD=7,
PQ- средняя линия.
Найти: S_{ADCD} =?



РЕШЕНИЕ.

1. Проведем дополнительное построение. На продолжении стороны AD за точку D отметим точку E, так, что прямые BD и CE будут параллельны.

2. Рассмотрим четырехугольник BCED.

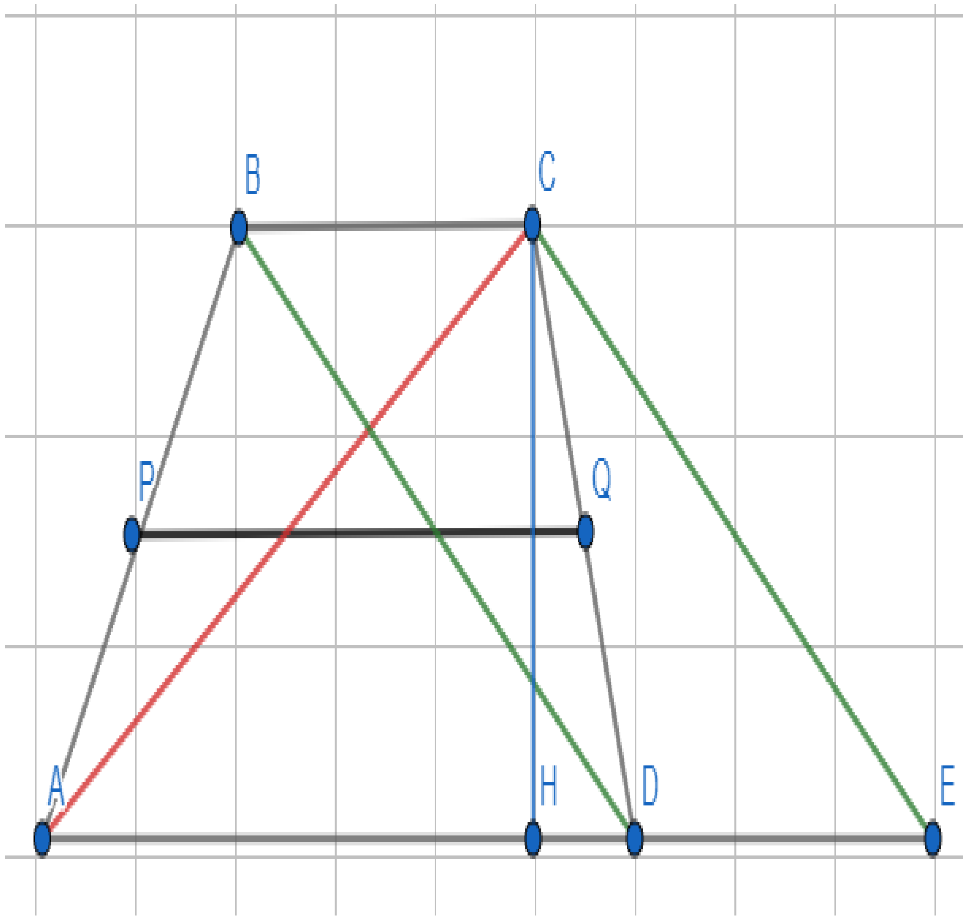
Так как BD||CE по построению,

BC ||DE, так как BC||AD- как основания трапеции . Следовательно

BCED – параллелограмм по определению.

Тогда по свойству параллелограмма противолежащие стороны равны, т.е.

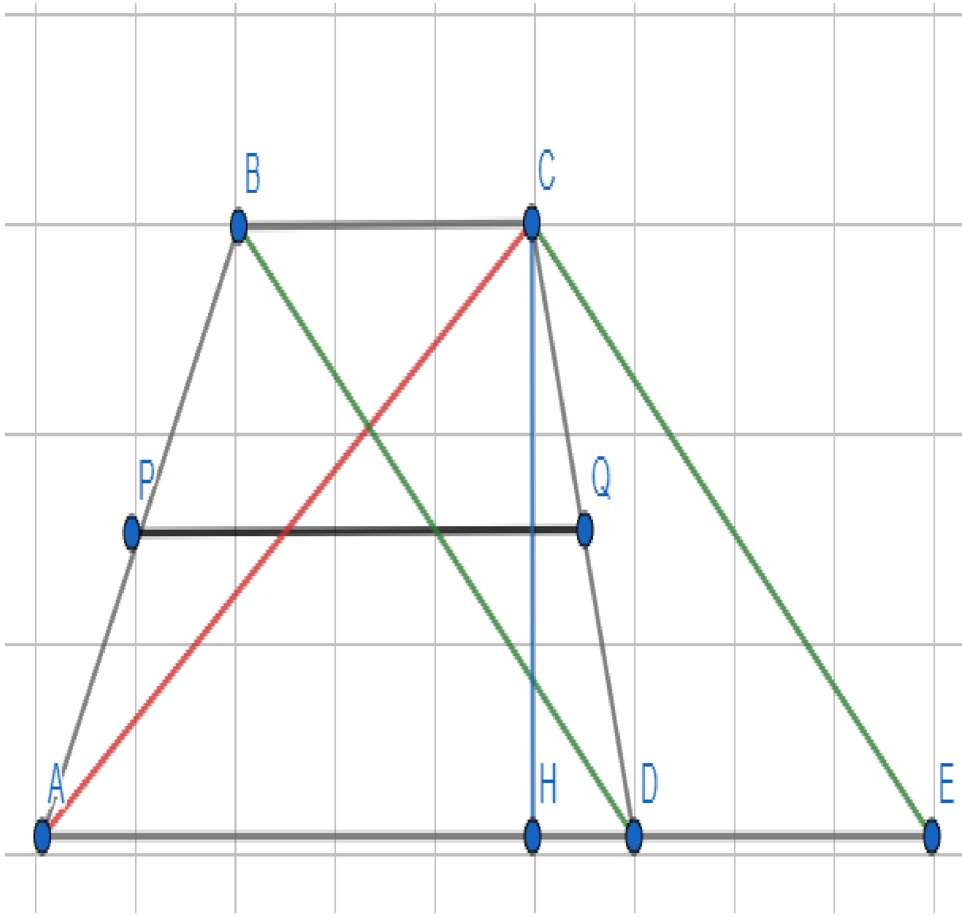
BC=DE и CE=BD=7.



РЕШЕНИЕ.

3. **Выразим площадь трапеции ABCD, опустим для этого высоту CH.**

$$S_{ABCD} = \frac{(BC + AD)}{2} CH$$



По условию средняя линия трапеции PQ =10.

По теореме средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полу сумме.

Тогда $\frac{(BC + AD)}{2} = 10$

Следовательно $S_{ABCD} = 10CH.$ **(1)**

РЕШЕНИЕ.

4. **Рассмотрим треугольник ACE и выразим его площадь.**

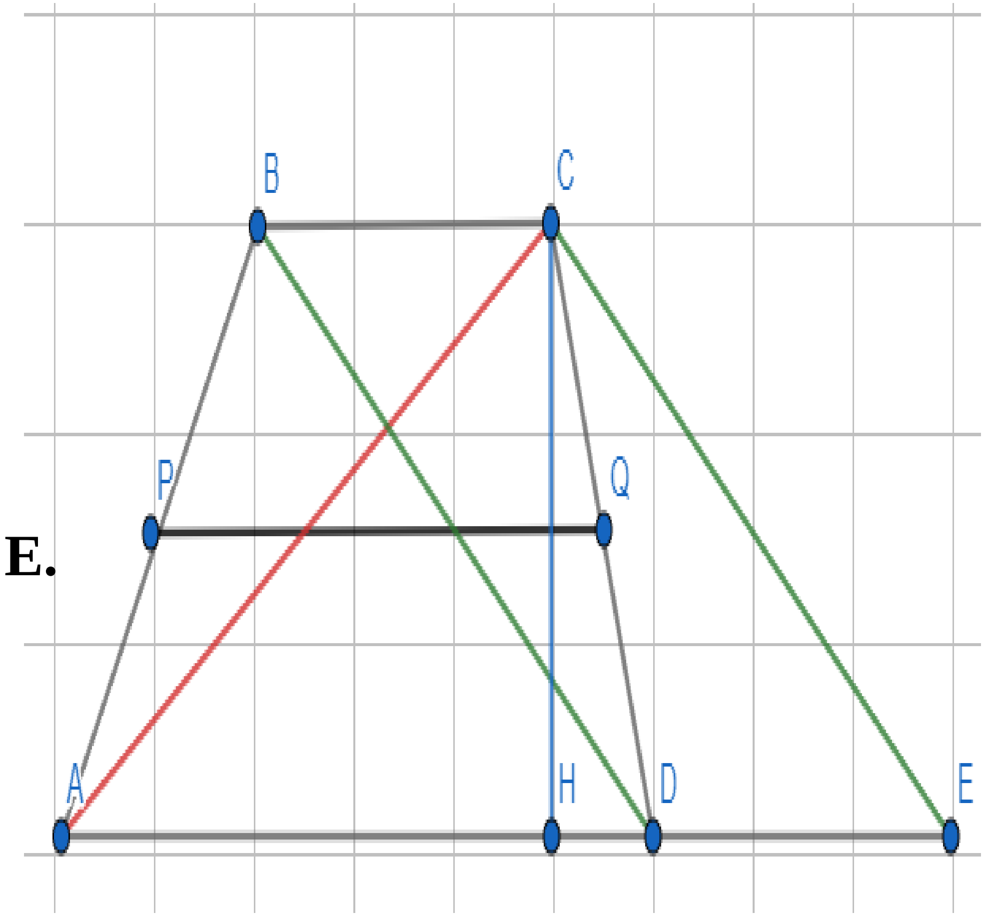
$$S_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot CH = \frac{1}{2}(AD + DE) \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot (AD + BC) \cdot CH$$

$S_{AEC} = 10CH$ **(2)**

Из условий (1) и(2) мы видим, что площадь трапеции ABCD равна площади треугольника ACE.

$$S_{ADCD} = S_{ABC}$$

Все стороны треугольника ACE мы можем выразить: AC=15 – по условию, CE=BD= 7 – по доказанному выше, AE = AD+DE = AD+BC =20.



РЕШЕНИЕ.

4. **Получили: AC=15,CE=7, AE=20. Найдем площадь треугольника по формуле Герона.**

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

, где

p-полупериметр, a,b, c – длины сторон треугольника.

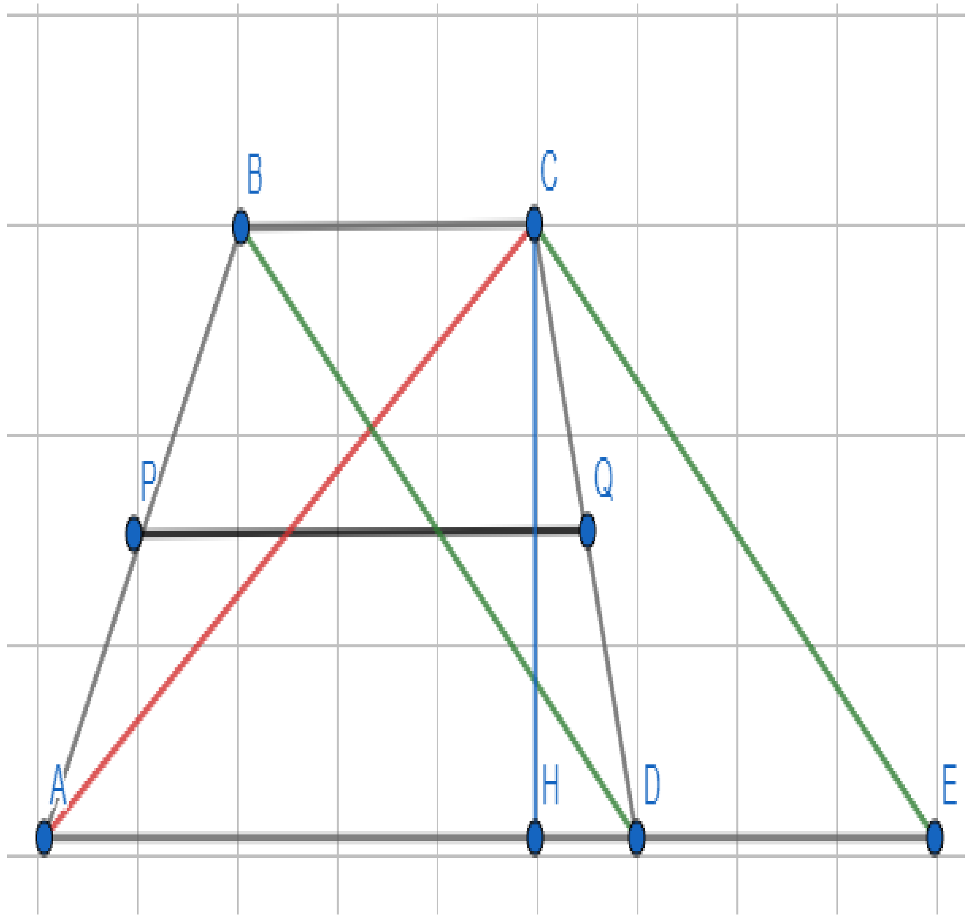
$$p = \frac{(AC + CE + AE)}{2},$$

$$p = \frac{(15 + 7 + 20)}{2} = 21.$$

$$S = \sqrt{21(21 - 15)(21 - 7)(21 - 20)} =$$

$$= \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 1} = \sqrt{49 \cdot 9 \cdot 4} = 7 \cdot 3 \cdot 2 = 42$$

Ответ: 42.



№25. Углы при основании трапеции равны 80^o и 10^o, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 20 и 17.
Найдите основания трапеции.

Дано: ABCD- трапеция,

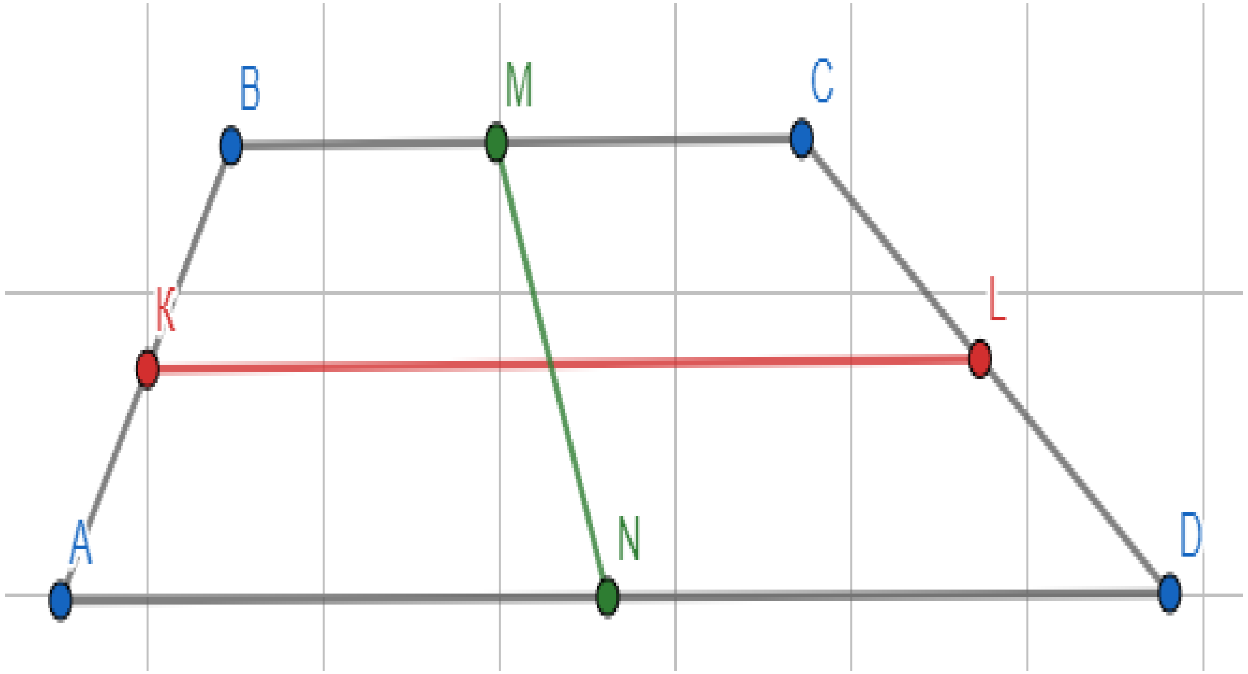
K и L – середины сторон AB и CD,

M и N – середины сторон BC и AD,

KL=20 , MN=17.

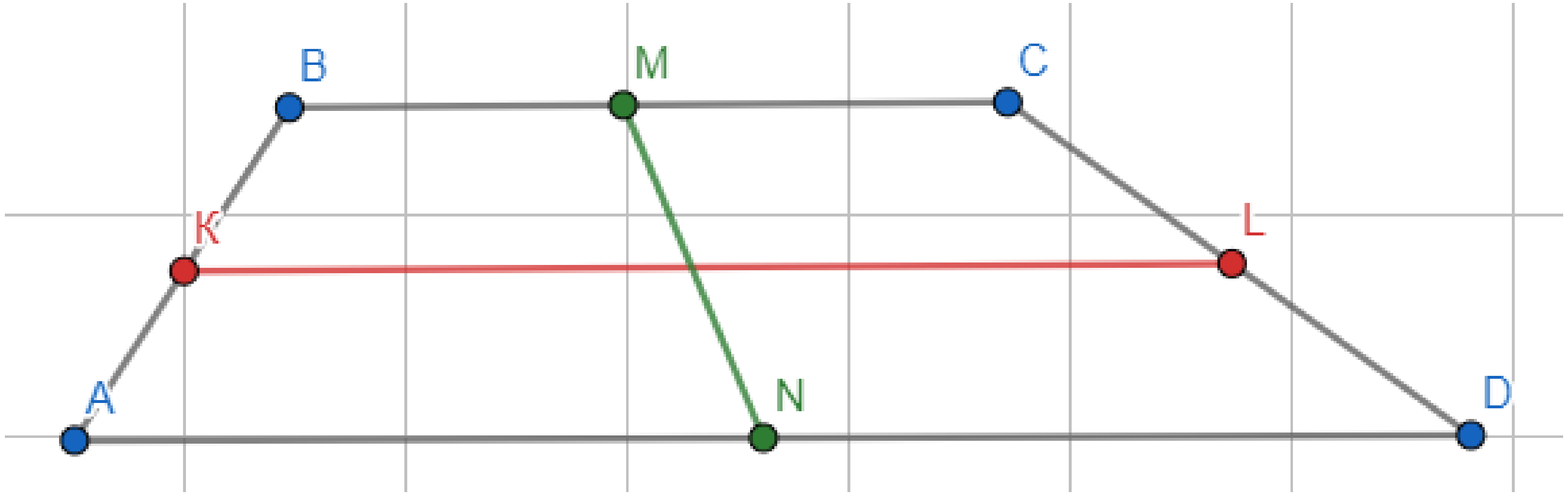
<A= 80^o и <D= 10^o

Найти: BC=? AD=?



№25. *РЕШЕНИЕ.*

1. По условию углы при одной из сторон основания равны 80^o **и** 10^o

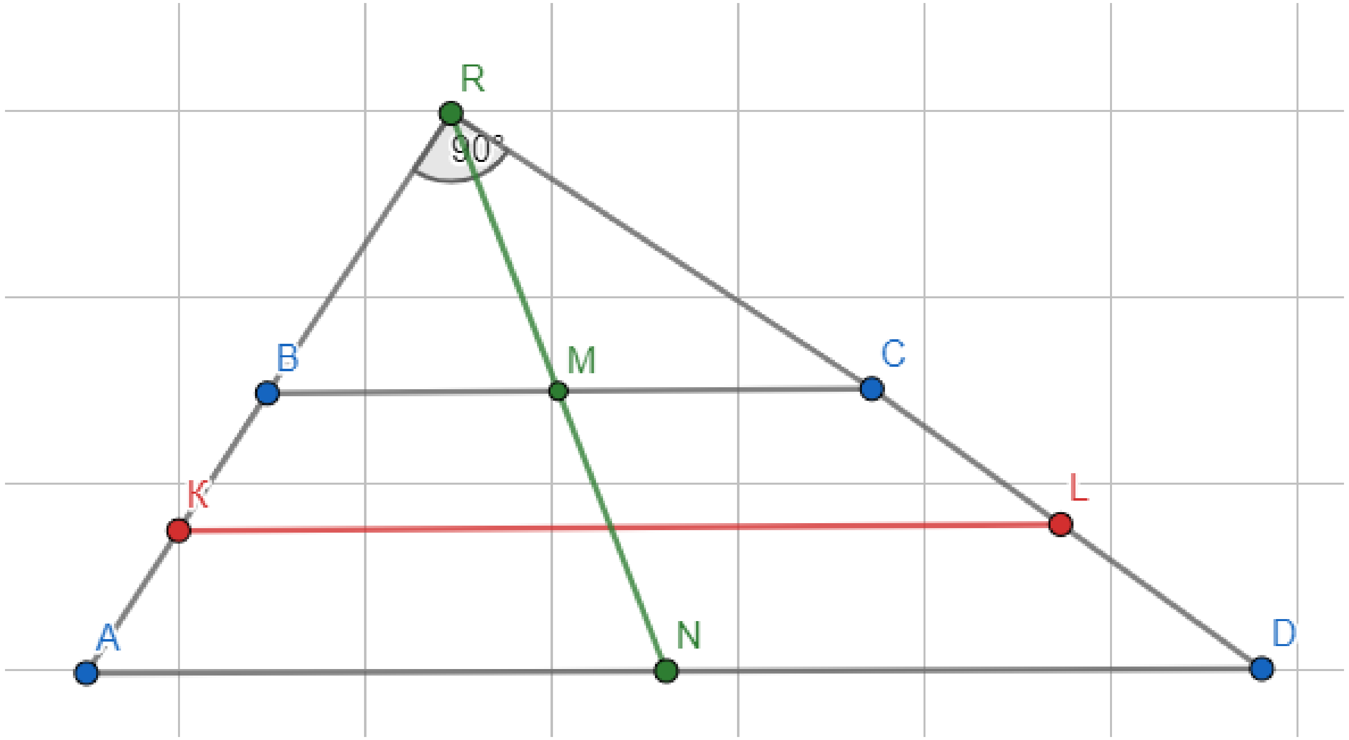


Заметим, из нашего рисунка, что такие углы лежат при основании AD

$< D = 10^{\circ}, < A = 80^{\circ}$. **Найдем их сумму:** $< D + < A = 10^{\circ} + 80^{\circ} = 90^{\circ}$.

№25. РЕШЕНИЕ.

2. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в одной точке и назовём её R .



Получим треугольник ARD у которого <ARD $= 180^o - (10^o + 80^o) = 90^o$

Следовательно, треугольник ARD – прямоугольный с гипотенузой AD.

№25. РЕШЕНИЕ.

3. По условию N – середина AD, тогда RN – медиана, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы - $RN = \frac{AD}{2}$ (1)

Аналогично, рассмотрим треугольник

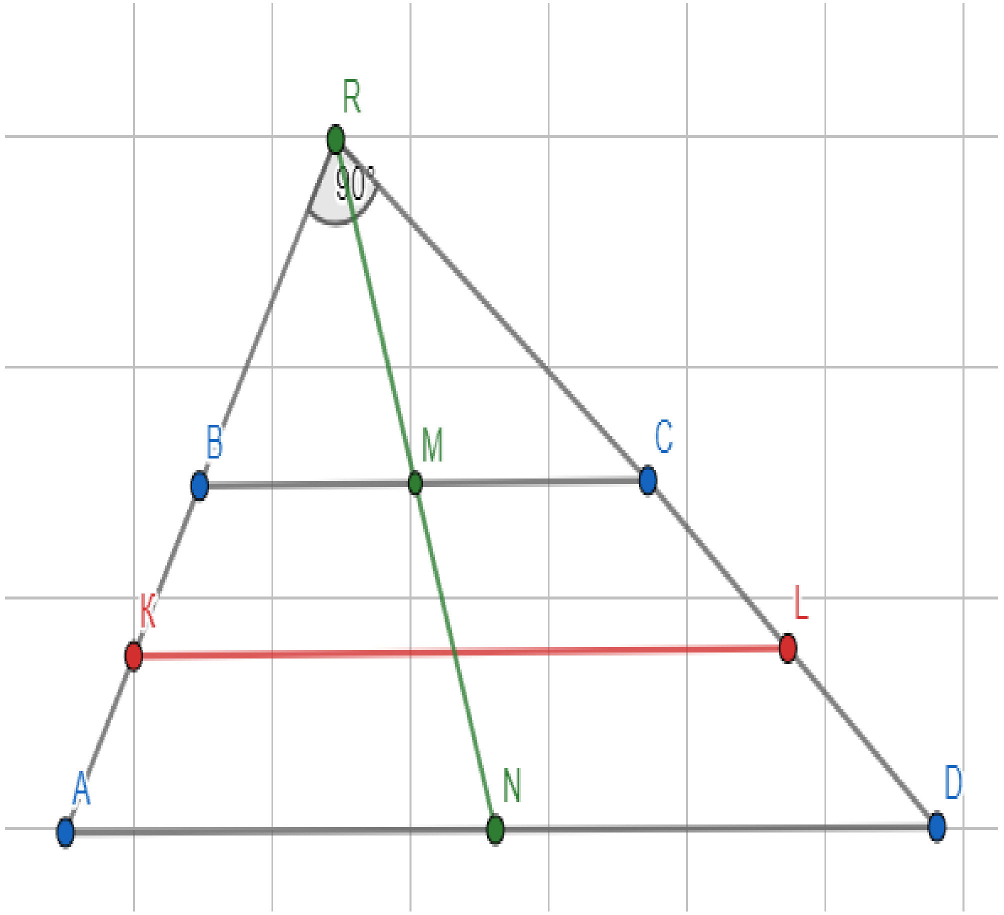
BRC – прямоугольный с гипотенузой BC, так как M-середина BC по условию, то

RM - медиана, проведенная из вершины прямого угла.

Тогда $RM = \frac{BC}{2}$ (2)

4. Выразим MN из условий (1) и (2).

MN = RN – RM = $\frac{AD}{2} - \frac{BC}{2} = \frac{AD - BC}{2}$. **(3)**



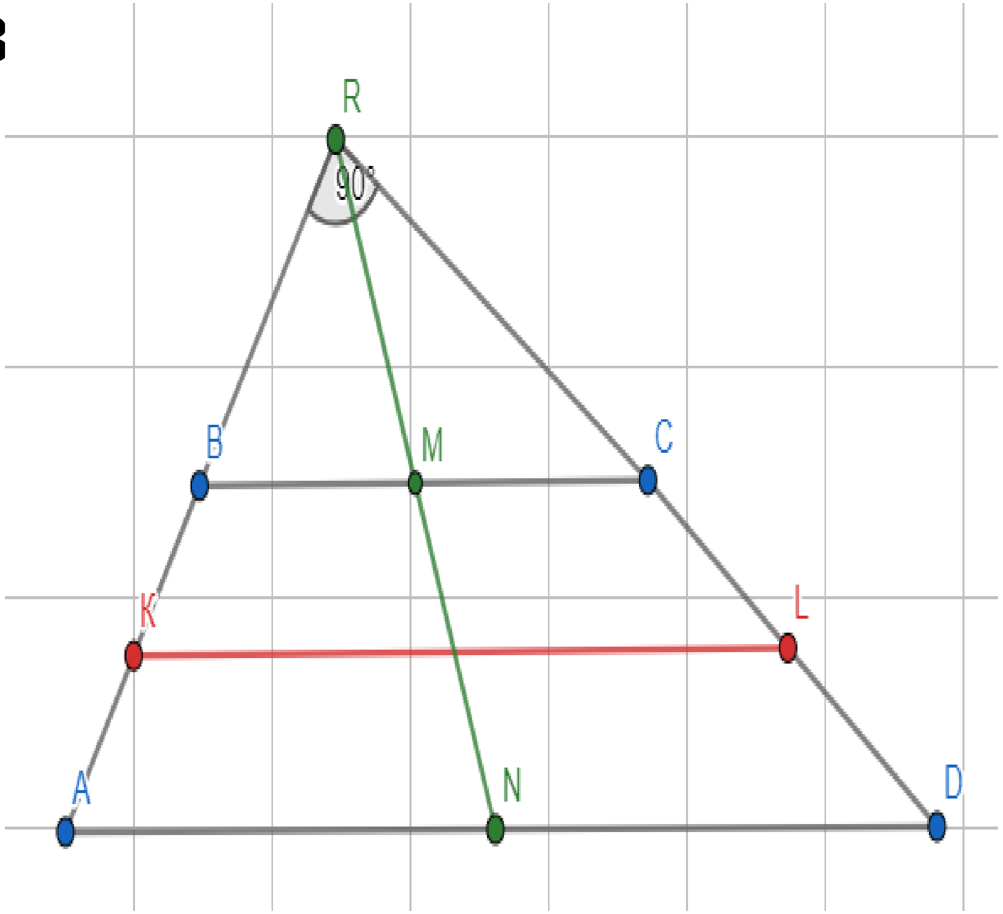
№25. *РЕШЕНИЕ.*

5. По условию К и L – середины сторон AB и DC. Тогда по определению отрезок KL – средняя линия трапеции. По теореме о средней линии :

средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полу сумме.

Следовательно, $KL = \dfrac{BC + AD}{2}$ (4) **.**

Из условий (3), (4) и дано KL= 20, MN =17.



$$KL = \frac{BC + AD}{2}, MN = \frac{AD - BC}{2}$$

$20 = \dfrac{BC + AD}{2}, 17 = \dfrac{AD - BC}{2}$ **до множим левую и**

правую часть равенств на 2.

№25. РЕШЕНИЕ.

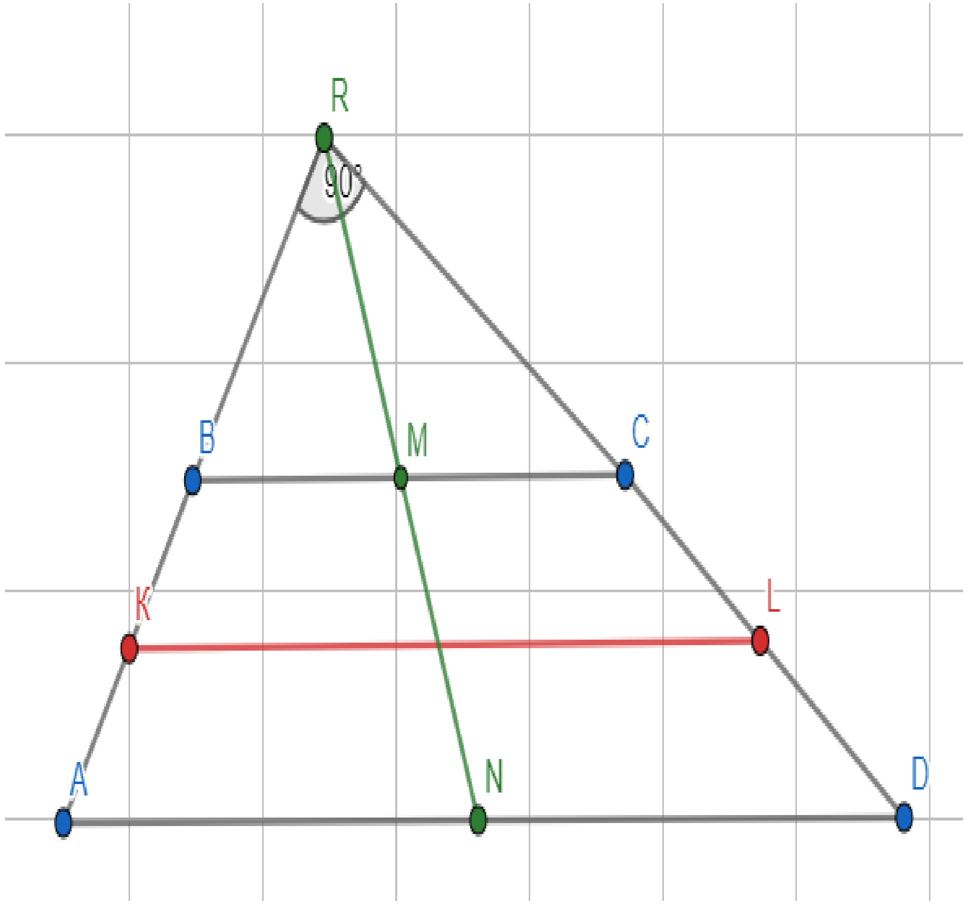
5. Получим: $BC + AD = 40, AD - BC = 34;$

Сложим левые и правые части полученных равенств:

$$\begin{cases} BC + AD = 40 \\ +AD - BC = 34 \\ \hline 2AD = 74 \end{cases} \Rightarrow AD = 37.$$

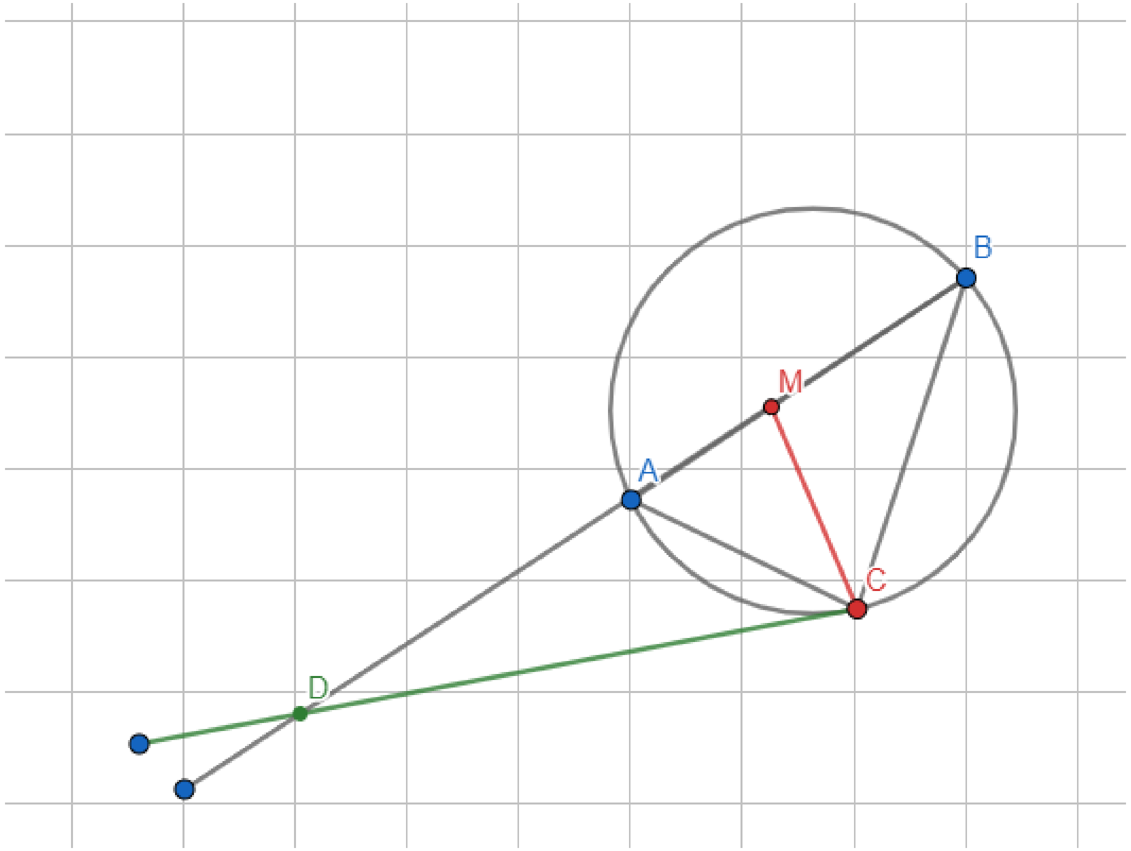
Тогда, найдем BC подставив значение AD=37 в

Уравнение $BC + AD = 40, \quad BC = 40 - 37 = 3.$



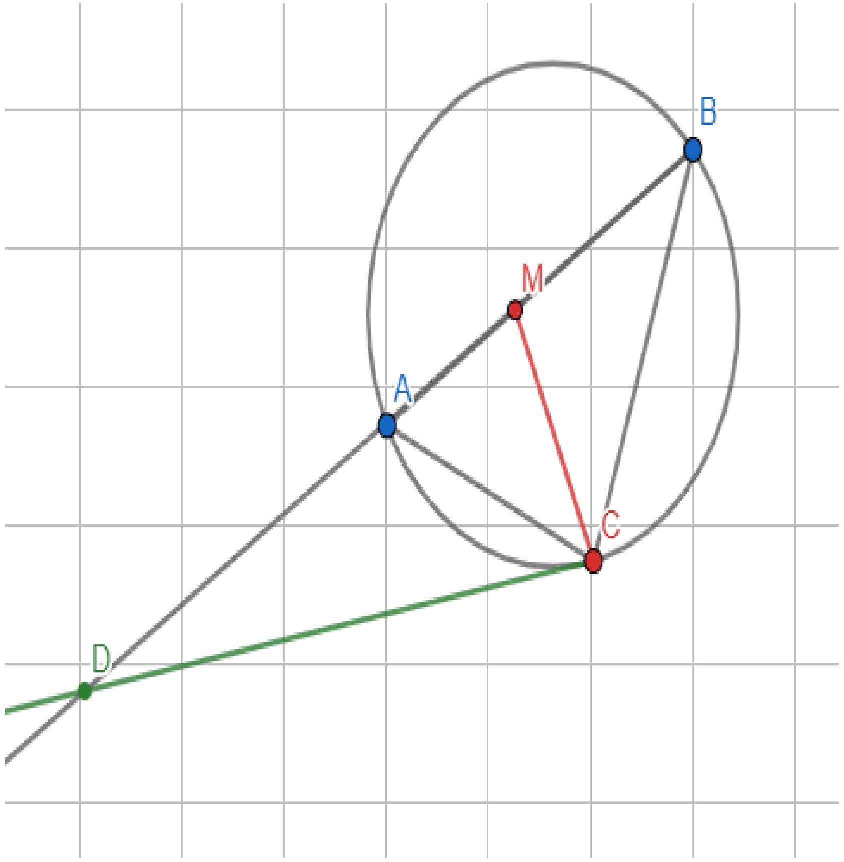
Ответ: 37 и 3.

№24. БИССЕКТРИСА ТРЕУГОЛЬНИКА АВС ДЕЛИТ АВ на ОТРЕЗКИ АМ=5 И МВ =10. Касательная к окружности, описанной около треугольника АВС, проходит через точку С и пресекает прямую АВ в точке D. Найдите CD.



№24. РЕШЕНИЕ

1. По свойству биссектрисы: биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки пропорциональные к прилежащим сторонам треугольника, то есть $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{MB}$



По условию AM=5,

MB=10, тогда $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$ **следовательно** $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ **. (1)**

Рассмотрим треугольники DCA и DBC :

<D - общий

<DCA =<DBC , так как

<DCA – угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной заключенной в нем дуги, т.е.

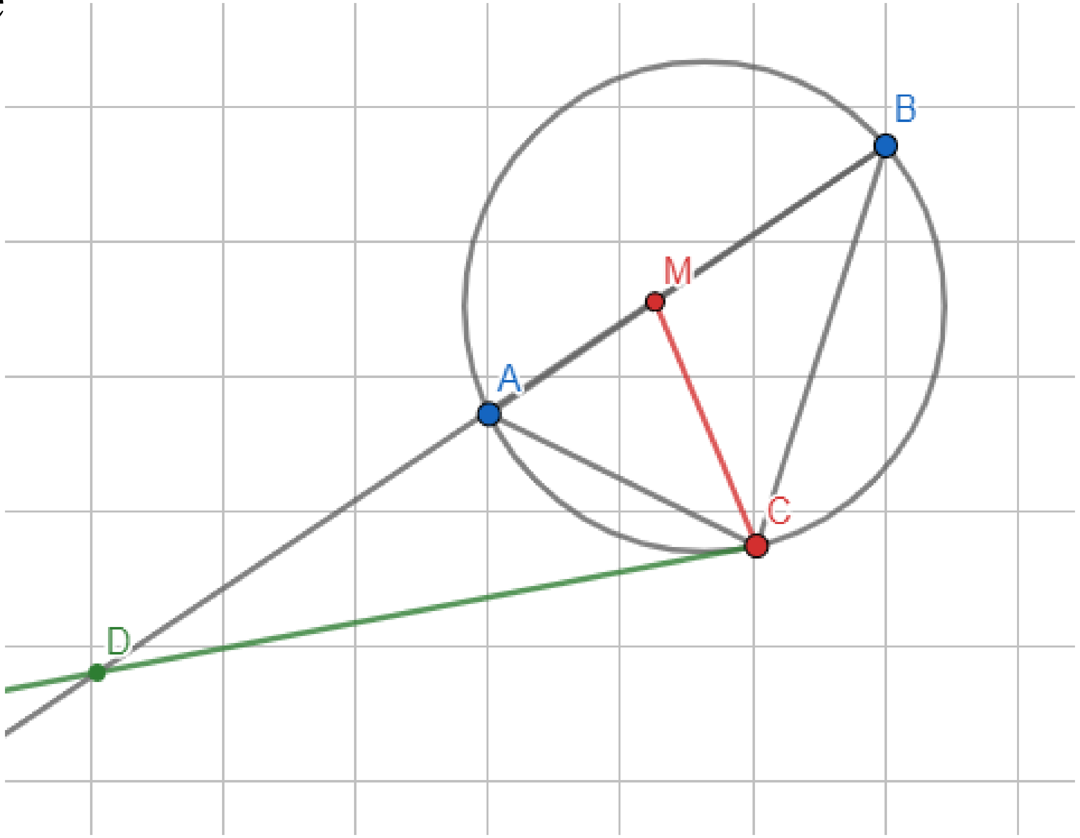
<DCA = $\frac{1}{2}\smile$ **AC.**

2. <DBC – вписанный, его градусная мера равна половине дуги на которую он опирается.
<DBC = $\frac{1}{2}\smile$ **AC.**

№24. РЕШЕНИЕ

3. С-но, треугольники DCA и DBC подобны по двум углам. В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{DC}{AD} = \frac{BC}{AC} \quad (2)$$



Из (1) и (2) получаем:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{DC}{AD} = 2$$

По условию AM=5 И MB =10

$$\frac{BD}{CD} = 2, \; CD = \frac{1}{2}BD \; (3)$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CD}{BD-15} = 2, \; CD = 2BD - 30 \; (4)$$

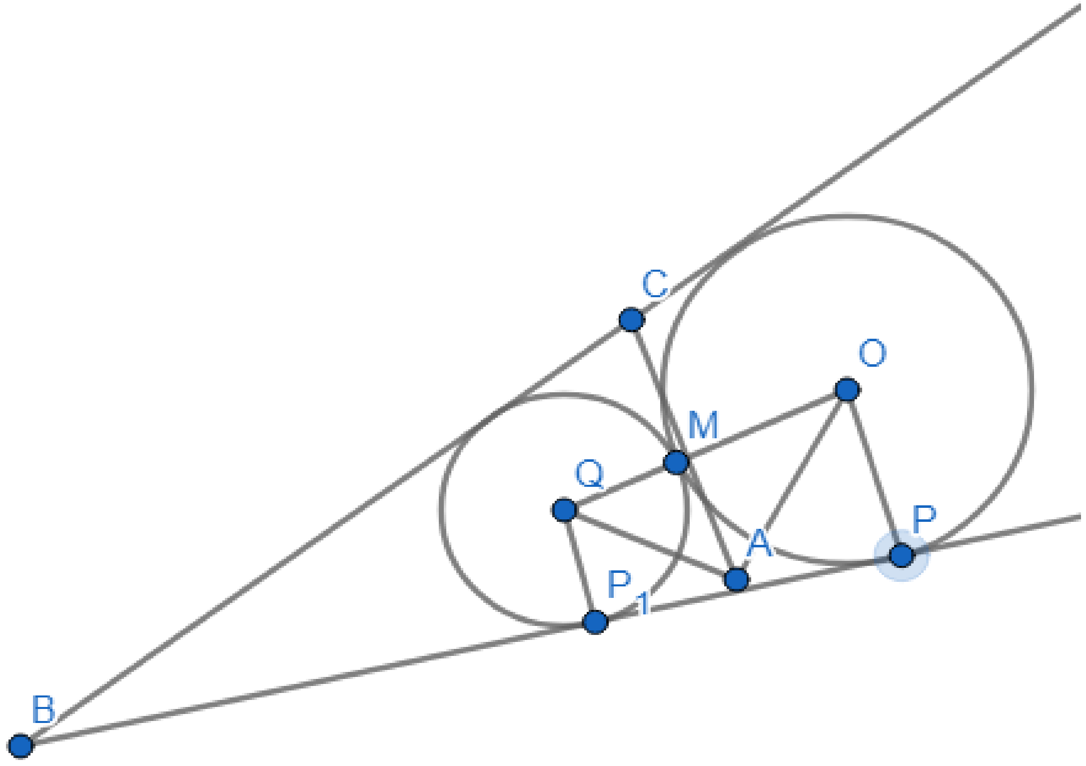
$$2BD - 30 = \frac{1}{2}BD, \; \frac{3}{2}BD = 30, \; BD = 20$$

$$CD = \frac{1}{2} \cdot 20, \; CD = 10.$$

Ответ: 10.

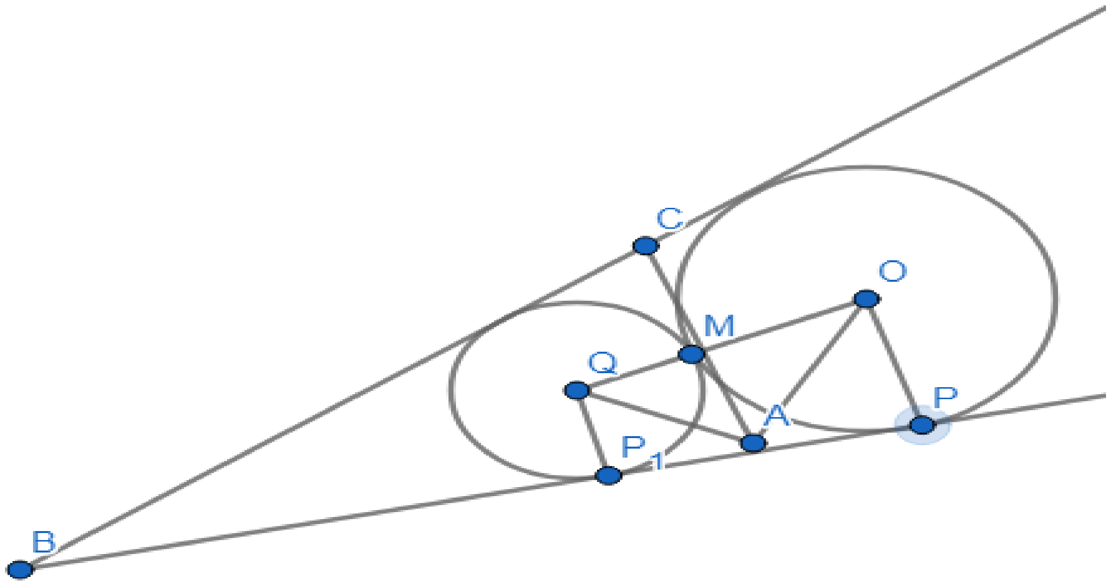
№25. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 12. Окружность радиуса 8 с центром вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника и касается основания AC. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Дано: ΔABC – равнобедренный
AC – основание,
AC=12,
Окружность радиуса OM=8
с центром вне ΔABC.
Найти: QM–радиус
вписанной в ΔABC окружности.



№25.

Дано: ΔABC – равнобедренный
AC – основание,
AC=12,
Окружность радиуса OM=8
с центром вне ΔABC.
Найти: QM–радиус
вписанной в ΔABC окружности.

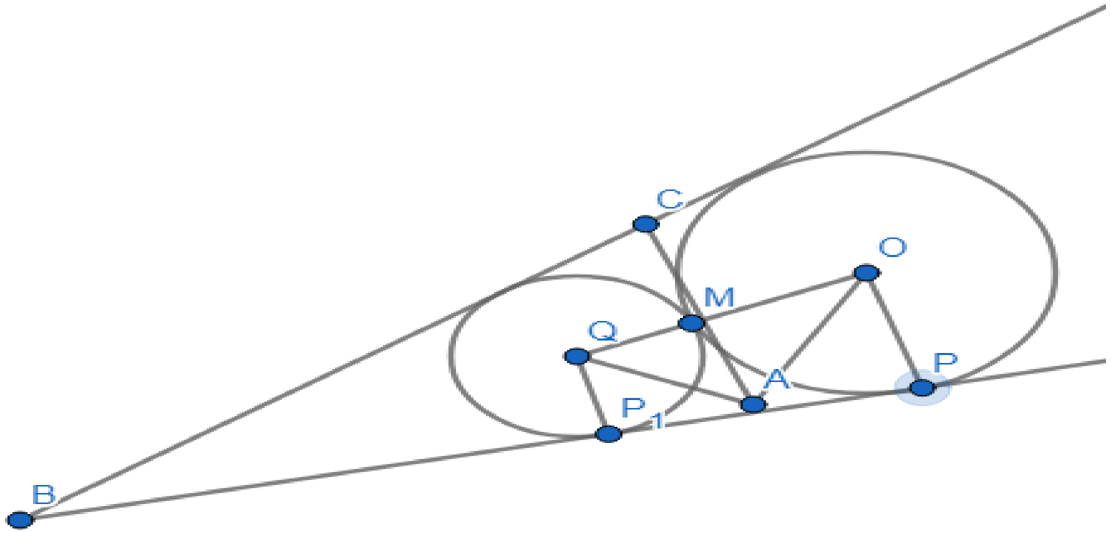


Решение .

1. Пусть O –центр окружности вне ΔABC , а Q –центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Так как окружности вписаны в угол, то их центры лежат на биссектрисе угла и точка M – точка касания окружностей делит AC пополам, так как ΔABC - равнобедренный, то биссектриса , проведенная основанию является медианой и высотой. Лучи AO и AQ – биссектрисы, т.к. все точки равноудаленные от сторон угла лежат на биссектрисе угла $QM=QP_1$ и $OM=OP$ как радиусы окружностей. Тогда $< QAO = \frac{1}{2} < BAM + \frac{1}{2} < MAP = \frac{1}{2}(<BAM + < MAP) = \frac{1}{2} \cdot 180 = 90.$ Биссектрисы смежных углов образуют прямой угол - $< OAQ$ – прямой.

№25.

Дано: ΔABC – равнобедренный
AC – основание,
AC=12,
Окружность радиуса OM=8
с центром вне ΔABC.
Найти: QM–радиус
вписанной в ΔABC окружности.



2. Тогда $\Delta\ OAQ$- прямоугольный. AM – высота, так как QM и OM перпендикулярны AC и M- общая точка касания. Тогда AM высота проведенная из вершины прямого угла. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

$$\mathrm{AM}^2 = MQ \cdot MO$$

$$QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{36}{8} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

№25

БИССЕКТРИСА УГЛА А, ТРЕУГОЛЬНИКА АВС ДЕЛИТ ВЫСОТУ ВН В ОТНОШЕНИИ5:4, СЧИТАЯ ОТ ВЕРШИНЫ. ВС РАВНО 6. НАЙДИТЕ РАДИУС ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ.

Дано:

ΔABC,

AL – биссектриса,

BH – высота,

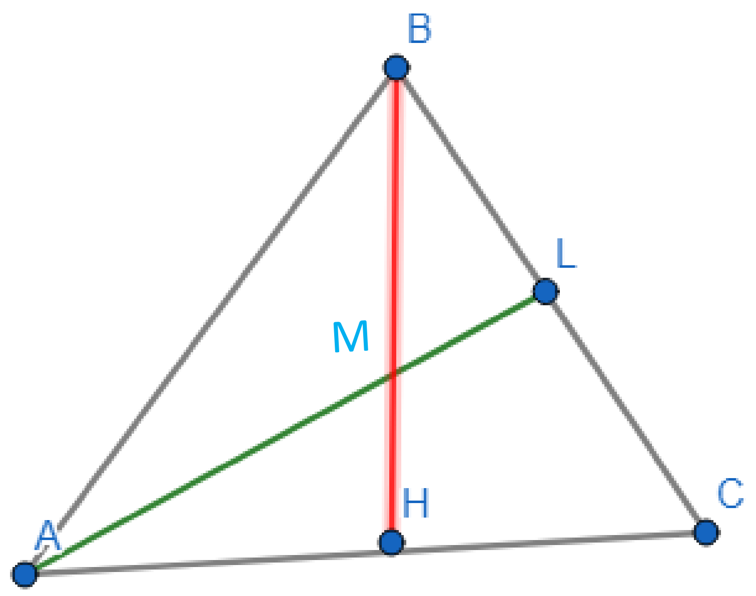
AL$\cap$ BH в точке M,

BM:MH = 5:4,

BC=6,

R-радиус описанной окружности.

Найдите: R=?



№25 Дано:

ΔABC

AL – биссектриса,

BH – высота,

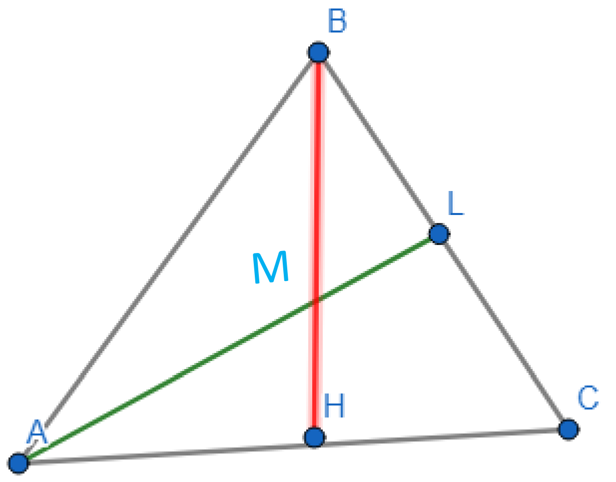
$AL \cap BH$ в точке M,

BM:MH = 5:4,

BC=6,

R-радиус описанной окружности.

Найдите: R=?



Решение: 1. По теореме о биссектрисе угла (биссектриса угла делит противолежащую сторону на отрезки пропорциональные к прилежащим сторонам угла) в ΔABC получим следующие равенства: $\frac{AB}{AH} = \frac{BM}{MH} = \frac{5}{4}$.

Тогда пусть BM=5x, MH=4x, BH=9x , AB=5y и AH=4y.

№25 Дано:

ΔABC

AL – биссектриса,

BH – высота,

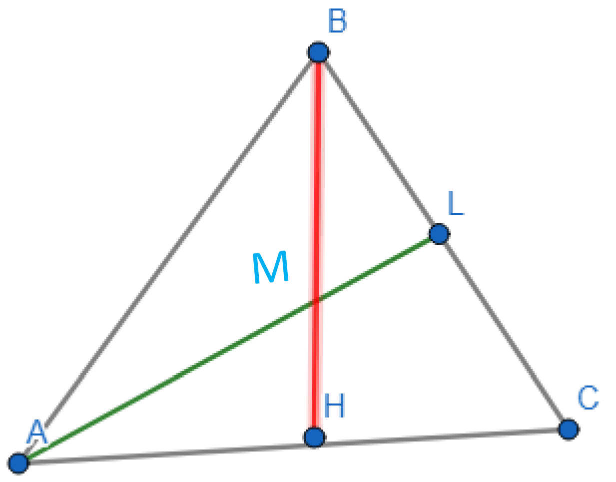
AL$\cap$ BH в точке M,

BM:MH = 5:4,

BC=6,

R-радиус описанной окружности.

Найдите: R=?



Решение: 2. Рассмотрим Δ ABH, так как BH –высота, то $< \mathrm{H} = 90$ и Δ ABH- прямоугольный. По теореме Пифагора:

$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{AH}^2$, $25\mathrm{y}^2 = 16\mathrm{y}^2 + 81\mathrm{x}^2, 9\mathrm{y}^2 = 81\mathrm{x}^2, 3\mathrm{y} = 9\mathrm{x}, \mathrm{y} = 3\mathrm{x}.$

$\sin \mathrm{A} = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}} = \frac{9\mathrm{x}}{5\mathrm{y}} = \frac{9\mathrm{x}}{15\mathrm{x}} = 0{,}6.$

3. По теореме синусов: 2R=$\frac{BC}{\sin A}=\frac{6}{0{,}6}$, $\mathrm{R} = 6:1{,}2 = 5.$

Ответ: 5.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !