МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
РУССКАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ ГИМНАЗИЯ № 2 г. ТОМСКА

BIT EDUCATION
КАДРЫ ДЛЯ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ

ВИРТУАЛЬНАЯ ТВОРЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ

АЛГЕБРА ОГЭ решение задач № 20, 21, 22

Учитель Беркутова И.А.

Задание 20. Пример 1.

Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Пример 1. Решение.

Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$; $(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$; $(x-7)\left(x-7-\sqrt{11}\right) < 0$,

Произведение двух множителей отрицательно, если множители разных знаков. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $\begin{cases} x-7<0, \\ x-7-\sqrt{11}>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<7, \\ x>7+\sqrt{11}, \end{cases}$ решений нет.

Второй случай: $\begin{cases} x-7>0, \\ x-7-\sqrt{11}<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>7, \\ x<7+\sqrt{11}, \end{cases}$ $7<x<7+\sqrt{11}.$

Решение исходного неравенства: $7<x<7+\sqrt{11}$.

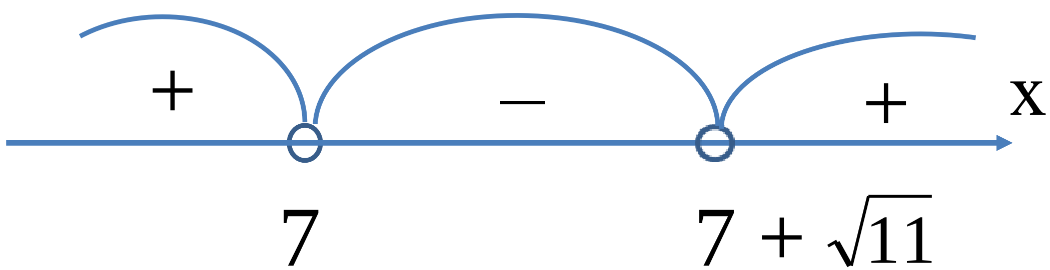
Ответ: $(7; 7+\sqrt{11})$.

Пример 1. Решение 2.

Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$; $(x-7)^2 - \sqrt{11}(x-7) < 0$; $(x-7)\left(x-7-\sqrt{11}\right) < 0$,



Ответ: $(7;\ 7+\sqrt{11})$.

Пример 1. Решение 3.

Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$; $x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11} < 0$.

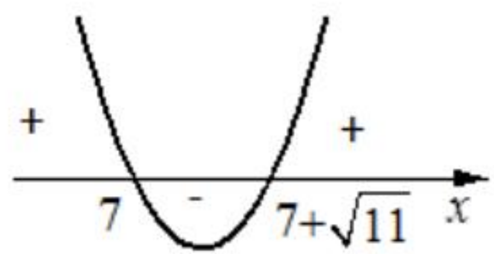
Рассмотрим функцию $y = x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11}$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем нули функции: $x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11} = 0$;

$x = \dfrac{14+\sqrt{11}-\sqrt{11}}{2}$, $x = \dfrac{14+\sqrt{11}+\sqrt{11}}{2}$; $x = 7$, $x = 7+\sqrt{11}$.

Схематично изобразим параболу

$y = x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11}$.



$y < 0$ при $x \in (7; 7+\sqrt{11})$

Ответ: $(7; 7+\sqrt{11})$.

Пример 1. Решение 4.

Решите неравенство $(x-7)^2<\sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

$$(x-7)^2<\sqrt{11}(x-7) \Leftrightarrow (x-7)\left(x-7-\sqrt{11}\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-7<0, \\ x-7-\sqrt{11}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-7>0, \\ x-7-\sqrt{11}<0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<7, \\ x>7+\sqrt{11} \end{cases} \\ \begin{cases} x>7, \\ x<7+\sqrt{11} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 7<x<7+\sqrt{11}.$$

Ответ: $(7;7+\sqrt{11})$.

Проверь себя

20

$(x-8)^2 < \sqrt{3}\cdot(x-8)$

$(x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$

$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+8<0 \\ x-8-\sqrt{3}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+8>0 \\ x-8-\sqrt{3}<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-8 \\ x>8+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x>-8 \\ x<8+\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x>-8 \\ x<8+\sqrt{3} \end{cases}$

Ответ: $x\in(-8;\ 8+\sqrt{3})$

20 Решите неравенство $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)(x-8-\sqrt{3})<0,$$

откуда $8<x<8+\sqrt{3}$.

Ответ: $(8;\ 8+\sqrt{3})$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

? баллов

Проверь себя

20

$(x-8)^2 < \sqrt{3}\cdot(x-8)$

$(x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$

$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+8<0 \\ x-8-\sqrt{3}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+8>0 \\ x-8-\sqrt{3}<0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-8 \\ x>8+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x>-8 \\ x<8+\sqrt{3} \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x>-8 \\ x<8+\sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $x\in(-8;\ 8+\sqrt{3})$

20 Решите неравенство $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)\left(x-8-\sqrt{3}\right)<0,$$

откуда $8 < x < 8+\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(8;\ 8+\sqrt{3}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

1 балл

Задание 20. Пример 2.

Решите уравнение $x^4 = (2x - 15)^2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Пример 2. Решение.

Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

Решение.

$x^4=(2x-15)^2$, $(x^2)^2-(2x-15)^2=0$, $(x^2-2x+15)(x^2+2x-15)=0$.

Произведение двух множителей равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получаем: $x^2-2x+15=0$ или $x^2+2x-15=0$.

$x^2-2x+15=0$, $x^2-2x+1+14=0$, $(x-1)^2=-14$ не имеет корней.

$x^2+2x-15=0$, $x^2+2x+1-16=0$, $(x+1)^2-4^2=0$, $(x+1-4)(x+1+4)=0$, $(x-3)(x+5)=0$

откуда $x-3=0$ или $x+5=0$; $x=3$ или $x=-5$.

Ответ: -5; 3.

Пример 2. Решение 2.

Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

Решение.

$x^4=(2x-15)^2$, откуда $x^2=-(2x-15)$ или $x^2=2x-15$, получаем:

$x^2+2x-15=0$ или $x^2-2x+15=0$.

$x^2-2x+15=0$, $D=4-60=-56<0$ – уравнение не имеет корней.

$x^2+2x-15=0$, $D=4+60=64$,

$x=\dfrac{-2-8}{2}$, $x=\dfrac{-2+8}{2}$; $x=-5$, $x=3$.

Ответ: -5; 3.

Пример 2. Решение 3.

Решите уравнение $x^4 = (2x-15)^2$.

Решение.

$$x^4 = (2x-15)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 2x-15 \\ x^2 = -2x+15 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 = -14 \\ (x+1)^2 = 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 4 \\ x+1 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-5; 3\}$.

Задание 20. Пример 3.

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Пример 3. Решение.

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Решение.

Пусть $(x-1)^2=t$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-2t-3=0\text{, откуда } t=-1 \text{ или } t=3.$$

Уравнение $(x-1)^2=-1$ не имеет корней.

Уравнение $(x-1)^2=3$; $x-1=\sqrt{3}$ или $x-1=-\sqrt{3}$; $x=1+\sqrt{3}$ или $x=1-\sqrt{3}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Пример 3. Решение 2.

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Решение.

$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$,

$(x-1)^4-2(x-1)^2+1-4=0$, $\left((x-1)^2-1\right)^2-2^2=0$,

$\left((x-1)^2-1-2\right)\left((x-1)^2-1+2\right)=0$, $\left((x-1)^2-3\right)\left((x-1)^2+1\right)=0$, откуда

$(x-1)^2-3=0$ или $(x-1)^2+1=0$.

Уравнение $(x-1)^2=-1$ не имеет корней.

Уравнение $(x-1)^2=3$; $x-1=\sqrt{3}$ или $x-1=-\sqrt{3}$; $x=1+\sqrt{3}$ или $x=1-\sqrt{3}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Пример 3. Решение 3.

20

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Решение.

$$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0 \Leftrightarrow \left((x-1)^2-1\right)^2=2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=3\\(x-1)^2=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=\sqrt{3}\\x-1=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{3}\\x=1-\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\}$.

Проверьте себя

20 $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$ Пусть $(x-1)^2=t$

$t^2-2t-3=0$

по т. Виета по т. обр. т. Виета

$t_1+t_2=2$ | $t_1=-1$ не удовлетворяет условию

$t_1 t_2=-3$ | $\underline{t_2=3}$

$(x-1)^2=t$ $t=3$

$(x-1)^2=3$

$1x^2-2x+1-3=0$

$x^2-2x-2=0$

$D=b^2-4ac=4+8=12$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги	1

? баллов

ВИРТУАЛЬНАЯ ТВОРЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ

Проверьте себя

20 $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$ Пусть $(x-1)^2=t$

$t^2-2t-3=0$

по т. Виета | по т. обр. т. Виета

$t_1+t_2=2$ | $t_1=-1$ не удовлетворяет условию

$t_1 t_2=-3$ | $t_2=3$

$(x-1)^2=t$ $t=3$

$(x-1)^2=3$

$1x^2-2x+1-3=0$

$x^2-2x-2=0$

$D=b^2-4ac=4+8=12$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2+2\sqrt{3}}{2}$

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

ТЕОРЕМА

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Справедливо утверждение, обратное теореме Виета:

ТЕОРЕМА

Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

Пример 3. Найдём подбором корни уравнения

$$x^2-x-12=0.$$

▶ Дискриминант $D=1-4\cdot1\cdot(-12)$ — положительное число. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда

$$x_1+x_2=1 \text{ и } x_1\cdot x_2=-12.$$

Если x_1 и x_2 — целые числа, то они являются делителями числа -12. Учитывая также, что сумма этих чисел равна 1, нетрудно догадаться, что $x_1=-3$ и $x_2=4$. ◁

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных	0

0 баллов

Проверьте себя

20

$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0.$

$t^2-2t-3=0.$

$D=4+12=16=4^2$

$x=\frac{2\pm4}{2}=\left\langle\begin{array}{l}3\\-1\end{array}\right.$

$(x-1)^4=t^2$

$(x-1)^2=t$

$(x-1)^2=3$

$x^2-2x+1=3.$

$x^2-2x-2=0.$

$D=4+8=12=2\sqrt3$

$x=\frac{2\pm2\sqrt3}{2}=\frac{\cancel{2}(1\pm\sqrt3)}{\cancel{2}}=1\pm\sqrt3$

$(x-1)^2=-1$

нет решений, т.к. квадрат не может быть отрицательным.

Ответ: $1+\sqrt3$; $1-\sqrt3$.

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt3$; $1+\sqrt3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
[illegible]	0

? баллов

Проверьте себя

20

$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0.$

$(x-1)^4=t^2$

$(x-1)^2=t$

$t^2-2t-3=0.$

$D=4+12=16=4^2$

$x=\frac{2\pm4}{2}=\left\langle\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right.$

$(x-1)^2=3$

$x^2-2x+1=3.$

$x^2-2x-2=0.$

$D=4+8=12=2\sqrt{3}$

$x=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{\cancel{2}(1\pm\sqrt{3})}{\cancel{2}}=1\pm\sqrt{3}$

$(x-1)^2=-1$

нет решений, т.к. квадрат не может быть отрицательным.

Ответ: $1+\sqrt{3}$; $1-\sqrt{3}$.

20 Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1

0 баллов

Задание 20. Пример 4.

Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Пример 4. Решение.

20

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$$

$$\frac{1 - x - 6x^2}{x^2} = 0 \qquad x^2 \neq 0,\ x \neq 0$$

$$1 - x - 6x^2 = 0 \ \Big|\cdot(-1)$$

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 - 4\cdot(-1)\cdot 6 = 25 = 5^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{12}$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{12} = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{12}_{3}} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-1-5}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

Ответ. $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$

20 Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

2 балла

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Проверьте себя

20

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$$

$$\frac{1 - x - 6x^2}{x^2} = 0 \quad \Big| \cdot x^2, \quad x \neq 0$$

$$-6x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-6) \cdot 1 = 25 = 5^2$$

$$x_1 = -0{,}5$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

Ответ: $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = \frac{1}{3}$

20 Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

0 баллов

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 20. Пример 5.

Решите уравнение: $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Пример 5. Решение.

Решите уравнение: $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$

Т.к $(x^2-25)^2 \geq 0$ и $(x^2+3x-10)^2 \geq 0$, то

решениями исходного уравнения являются общие решения уравнений

$$\begin{cases} x^2-25=0, \\ x^2+3x-10=0. \end{cases}$$

$x^2-25=0$

$x_1=-5$

$x_2=5$

$x^2+3x-10=0$

$D=49$

$x_1=2$

$x_2=-5$

Ответ: – 5.

Пример 5. Решение.

Решите уравнение: $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$

$$(x-5)^2(x+5)^2+(x+5)^2(x-2)^2=0$$

$$(x+5)^2((x-5)^2+(x-2)^2)=0$$

$(x+5)^2=0$ или $(x-5)^2+(x-2)^2=0$

$x=-5$ $\qquad$ $\begin{cases}(x-5)^2=0,\\(x-2)^2=0;\end{cases}$

$\begin{cases}x=5,\\x=2;\end{cases}$

Ответ: -5. $\qquad$ нет решений

Проверьте себя

$$(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$$

Заметим, что сумма квадратов равна 0 тогда и только тогда, когда каждый квадрат равен 0.

$$\begin{cases}(x^2-25)^2=0\\(x^2+3x-10)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-25=0\\x^2+3x-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+5)(x-5)=0\\(x+5)(x-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-5\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-5$$

Ответ: $\{-5\}$

Задание 21. Пример 1.

Первые 105 км автомобиль ехал со скоростью 35 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 60 км/ч, а последние 500 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 21. Пример 1. Решение.

Первые 105 км автомобиль ехал со скоростью 35 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 60 км/ч, а последние 500 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Автомобиль проехал 105 км со скоростью 35 км/ч за 3 часа;

120 км со скоростью 60 км/ч за 2 часа;

500 км со скоростью 100 км/ч за 5 часов.

Всего автомобиль проехал $105+120+500=725$ (км).

На весь путь автомобиль затратил $3 + 2 + 5 = 10$ (часов).

Средняя скорость равна $\frac{725}{10}=72,5$ (км/ч).

Ответ: 72,5 км/ч.

Проверьте себя

21 Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 36 км/ч, а вторую — со скоростью 99 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Пусть половина трассы составляет s километров. Тогда первую половину трассы автомобиль проехал за $\frac{s}{36}$ часа, а вторую — за $\frac{s}{99}$ часа. Значит, его средняя скорость в км/ч равна

$$\frac{2s}{\frac{s}{36}+\frac{s}{99}}=52{,}8.$$

Ответ: 52,8 км/ч.

Возьмём весь путь за 1, тогда:

	S, км	T, ч	V, км/ч
I	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 36}$	36
II	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 99}$	99

Найти:

$v_{средняя}$ - ?

Решение:

1) Найдем всё время движения:

$$\frac{1^{(11}}{2\cdot 36}+\frac{1^{(4}}{2\cdot 99}=\frac{15}{792}=\frac{5}{264}\ (ч)$$

2) $$v_{средн}=\frac{S\ (\text{общ})}{T\ (\text{общ})}=\frac{1}{\frac{5}{264}}=\frac{264}{5}=\frac{528}{10}=52{,}8\ (км/ч)$$

Ответ: 52,8 км/ч

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

? баллов

Проверьте себя

21 Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 36 км/ч, а вторую — со скоростью 99 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Пусть половина трассы составляет s километров. Тогда первую половину трассы автомобиль проехал за $\frac{s}{36}$ часа, а вторую — за $\frac{s}{99}$ часа. Значит, его средняя скорость в км/ч равна

$$\frac{2s}{\frac{s}{36}+\frac{s}{99}}=52{,}8.$$

Ответ: 52,8 км/ч.

Возьмём весь путь за 1, тогда:

	S, км	T, ч	V, км/ч
I	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 36}$	36
II	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\cdot 99}$	99

Найти:

$v_{средняя}$ - ?

Решение:

1) Найдем всё время движения:

$\frac{1^{(11}}{2\cdot 36}+\frac{1^{(4}}{2\cdot 99}=\frac{15}{792}=\frac{5}{264}$ (ч)

2) $v_{средн}=\frac{S\ (\text{весь})}{T\ (\text{весь})}=\frac{1}{\frac{5}{264}}=\frac{264}{5}=\frac{528}{10}=52{,}8$ (км/ч)

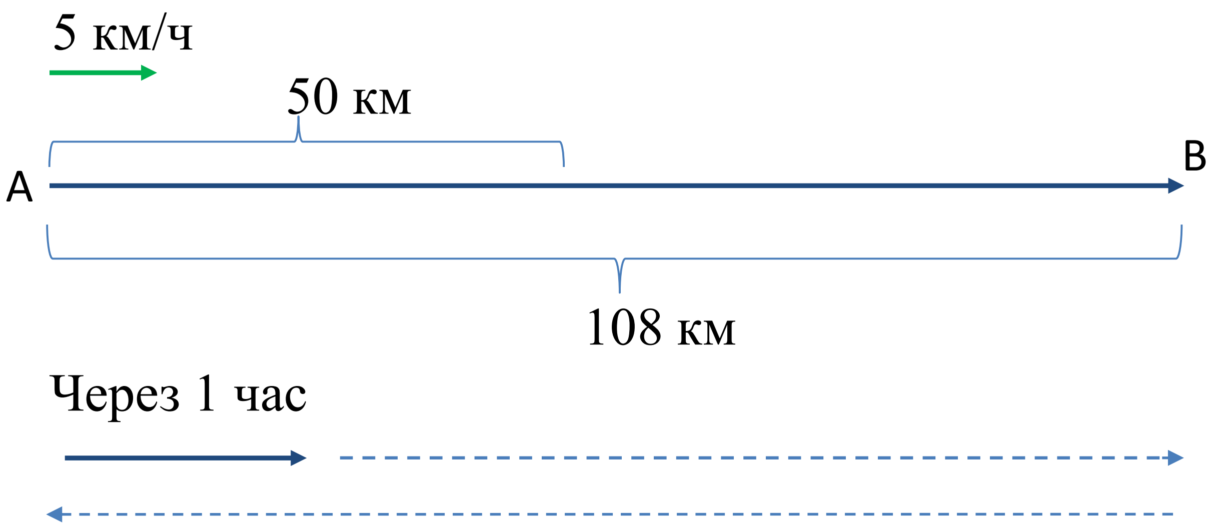
Ответ: 52,8 км/ч

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена описка или ошибка вычислительного характера	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных	0

0 баллов

Задание 21. Пример 2.

Расстояние между пристанями А и В равно 108 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 50 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.



Задание 21. Пример 2. Решение.

Расстояние между пристанями A и B равно 108 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот проплыл 50 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение.

Плот проплыл 50 км, значит, он плыл 10 часов, из которых лодка находилась в пути 9 часов.

Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда

по течению реки скорость лодки $v+5$ км/ч, время – $\frac{108}{v+5}$ ч;

против течения реки скорость лодки $v-5$ км/ч, время – $\frac{108}{v-5}$ ч;

время движения лодки 9 ч, тогда получаем уравнение: $\frac{108}{v+5}+\frac{108}{v-5}=9$.

По условию лодка движется против течения, следовательно, $v>5$.

$108v-540+108v+540=9v^2-225$.

$v^2-24v-25=0$, $D=24^2-4\cdot(-25)=676=26^2$, $v=\frac{24-26}{2}$ или $v=\frac{24+26}{2}$;

Условию $v>5$ из корней $v=-1$ и $v=25$ удовлетворяет корень $v=25$.

Ответ: 25 км/ч.

Задание 21. Пример 3. Решение.

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

	v, км/ч	**t, ч**	**S, км**
Против течения	(х – 4) км/ч	$\frac{77}{x-4}$ ч	77 км
По течению	(х +4) км/ч	$\frac{77}{x+4}$ ч на 2 ч <	77 км

Известно, что на обратный путь затрачено на 2 часа меньше, составим уравнение $\frac{77}{x-4}-\frac{77}{x+4}=2$

$77(x+4)-77(x-4)-2(x^2-16)=0$, $x \neq 4$, $x \neq -4$

$x^2=324$

$x_1=-18$

$x_2=18$

х = – 18 – не удовлетворяет условию задачи (скорость – величина положительная)

Ответ: 18 км/ч.

Проверьте себя

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

	V	t	S
по теч	$x+4$	$\frac{77}{x+4}$	77
пр теч	$x-4$	$\frac{77}{x-4}$	77

составим уравнение:

$$\frac{77}{x-4}-\frac{77}{x+4}=2$$

$$\frac{77(x+4)-77(x-4)-2(x^2-16)}{x^2-16}=0$$

ОДЗ: $x\neq 4$; $x\neq -4$

$$77(x+4-x+4)-2(x^2-16)=0$$

$$77\cdot 8-2x^2+32=0$$

$$616-2x^2+32=0$$

$$2x^2-648=0$$

$$x^2=324$$

$$x_1=18$$

$$x_2=-18$$

Ответ: 18

? баллов

Проверьте себя

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

	v	t	S
по теч	$x+4$	$\frac{77}{x+4}$	77
пр теч	$x-4$	$\frac{77}{x-4}$	77

составим уравнение:

$$\frac{77}{x-4}-\frac{77}{x+4}=2$$

$$\frac{77(x+4)-77(x-4)-2(x^2-16)}{x^2-16}=0$$

ОДЗ: $x\neq 4$; $x\neq -4$

$$77(x+4-x+4)-2(x^2-16)=0$$

$$77\cdot\overset{8}{4}-2x^2+32=0$$

$$616-2x^2+32=0$$

$$2x^2-648=0$$

$$x^2=324$$

$$x_1=18$$

$$x_2=-18$$

Ответ: 18

0 баллов

Задание 21. Пример 4.

Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

	v, км/ч	t, ч	S, км
1	(x +20) км/ч	$\frac{240}{x+20}$ ч на 1 ч <	240 км
2	x км/ч	$\frac{240}{x}$ ч	240 км

Известно, что первый автомобиль прибывает к финишу на 1 час раньше, составим уравнение $\frac{240}{x} - \frac{240}{x+20} = 1$

$240(x+20) - 240x - 1(x^2 + 20x) = 0$ x ≠ 0, x ≠ – 20

$x^2 + 20x - 4800 = 0$

D = 19600 $x_1 = 60$

$x_2 = -80$

x = – 80 не удовлетворяет условию задачи

если x = 60, x + 20 = 80

Ответ: 80 км/ч

Проверьте себя

21 Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 80 км/ч.

21

γ	$S_{км}$	$V_{км/ч}$
1	240	$x+20$
2	240	x

$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+20} = +1$

$\frac{240x - 240x + 4800 - x^2 - 20x}{x^2+20x} = 0$

$\frac{-x^2 - 20x + 4800}{x^2+20x} = 0 \; / x^2+20x;$ ОДЗ: $x \neq 0$; $x \neq 20$

$-x^2 - 20x + 4800 = 0$

$D = 400 - 4 \cdot (-1) \cdot 4800 = 400 + 19200 = 19600 = 140^2$

$x_1 = \frac{20+140}{-2} = \frac{160}{-2} = -80$ (не удов. усл. зад.)

$x_2 = \frac{20-140}{-2} = \frac{-120}{-2} = +60$

~~Ответ:~~

$V_1 = 80$ км/ч   Ответ: $V_1 = 80$ км/ч

	Баллы
	2

? баллов

Проверьте себя

21 Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 80 км/ч.

	Баллы
	2

21

	S км	V км/ч
1	240	x+20
2	240	x

$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+20} = +1$

$\frac{240x - 240x + 4800 - x^2 - 20x}{x^2+20x} = 0$

$\frac{-x^2 - 20x + 4800}{x^2+20x} = 0 \mid x^2+20x$; ОДЗ: $x \neq 0$; $x \neq 20$

$-x^2 - 20x + 4800 = 0$

$D = 400 - 4\cdot(-1)\cdot 4800 = 400 + 19200 = 19600 = 140^2$

$x_1 = \frac{20+140}{-2} = \frac{160}{-2} = -80$ (не удов. усл. зад.)

$x_2 = \frac{20-140}{-2} = \frac{-120}{-2} = +60$

~~Ответ.~~

$V_1 = 80$ км/ч   Ответ: $V_1 = 80$ км/ч

0 баллов

Задание 22. Пример 1.

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\geq -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите при каких значениях m прямая y = m имеет с графиком одну или две общие точки.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 22. Пример 1. Решение.

Построим график функции $y = -\frac{18}{x}$.

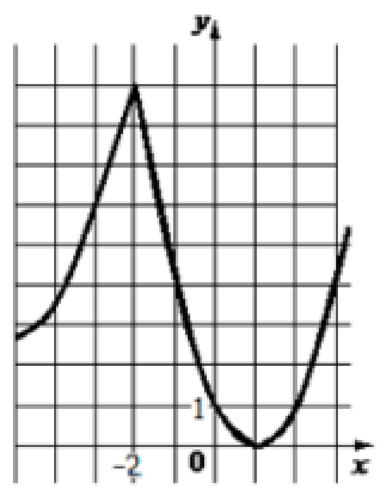
Графиком является гипербола, состоящая из двух ветвей, расположенных во второй и четвертой четвертях.

Так как нужна ветвь гиперболы при $x < -2$, то строим ветвь во второй четверти.

x	–1	–2	–3	–6	–9	–18
y	18	**9**	6	3	2	1

Построим график функции $y = x^2 - 2x + 1$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Вершина параболы – (1; 0). Так нам нужна часть параболы при при $x \geq -2$, то вычислим координаты точек при $x \geq -2$, учитываю симметрию относительно прямой $x = 1$.

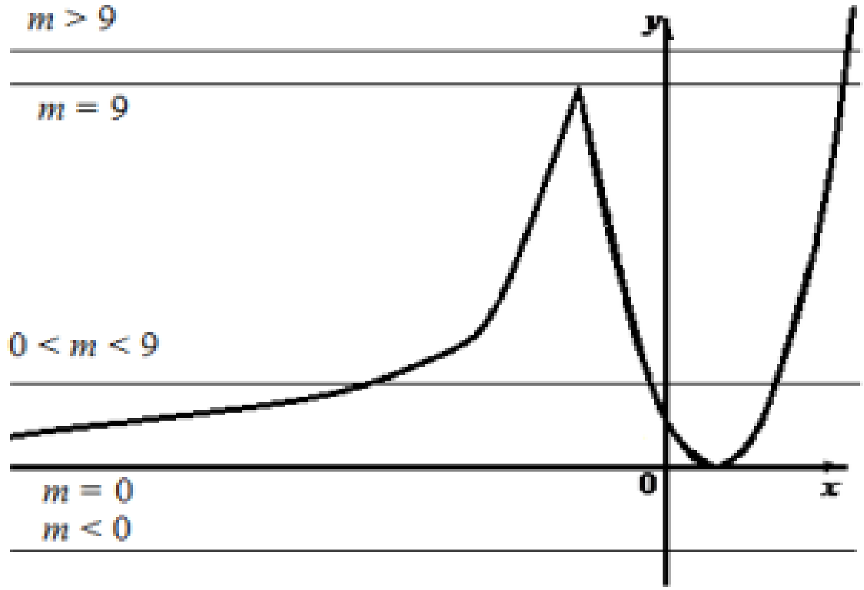


x	**–2**	–1	0	1	2	3	4
y	**9**	4	1	0	1	4	9

Оставим ветвь гиперболы при $x < -2$ и часть параболы при $x \geq -2$. (В точке $x = -2$ происходит «склейка» графиков.)

(окончание)

Построим семейство прямых $y = m$, параллельных или совпадающих с осью Ox.



При $m < 0$ прямая $y = m$ с графиком функции не имеет общих точек;
при $m = 0$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку;
при $0 < m < 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет три общих точки;
при $m = 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет две общие точки;
при $m > 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку.

Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \geq 9$.

Ответ: 0; $[9; +\infty)$.

Проверьте себя

Задание 22. Пример 1. Работа 2

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 \ ; \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x} \ ; \text{при } x < -2 \end{cases}$$

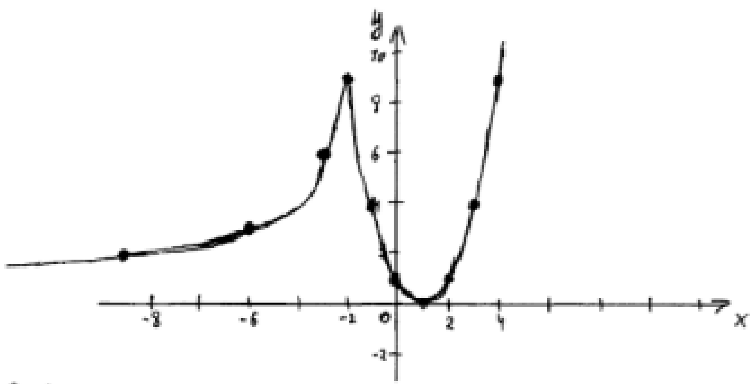
$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = 1 - 2 + 1 = 0$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$y = x^2 - 2x + 1$; при $x \geq -2$

x	-9	-6	-3
y	2	3	6

$y = -\frac{18}{x}$, при $x < -2$



Ответ: при $m = 0$ и $m \in [9; +\infty)$

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Ответ: 0; $[9; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1

? баллов

Проверьте себя

Задание 22. Пример 1. Работа 2

$y = \begin{cases} x^2-2x+1 \ ; \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x} \ ; \text{при } x < -2 \end{cases}$

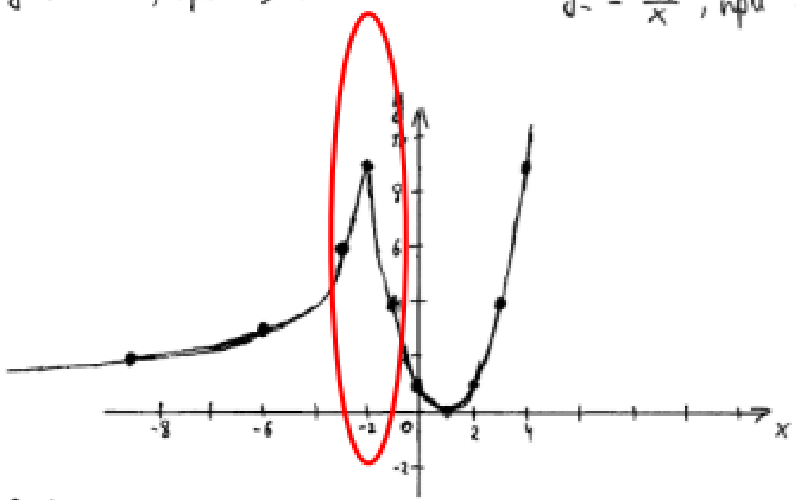
$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = 1-2+1=0$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$y = x^2-2x+1$; при $x \geq -2$

x	-9	-6	-3
y	2	3	6

$y = -\frac{18}{x}$, при $x < -2$



Ответ: при $m=0$ и $m \in [9;+\infty)$

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, \text{ если } x < -2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графи
или две общие точки.

Ответ: $0; [9;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2

0 баллов

Задание 22. Пример 2.

Постройте график функции

$$y = \left| x^2 - 4x + 3 \right|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 22. Пример 2. Решение.

$$y=\begin{cases}x^2-4x+3, x^2-4x+3\ge 0\\ -x^2+4x-3, x^2-4x+3\prec 0\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}x^2-4x+3, x\le 1, x\ge 3\\ -x^2+4x-3.,1\prec x\prec 3\end{cases}$$

1) При x ≤ 1, x ≥ 3 – часть параболы $y=x^2-4x+3$ – ветви направлены вверх, вершина имеет координаты (2; – 1) – расположенная в нижней полуплоскости относительно оси Ох.

x	0	1	2	3	4	5
y	3	0	- 1	0	3	8

2) При 1 < x < 3 – часть параболы $y=-x^2+4x-3$ – ветви направлены вниз, вершина имеет координаты (2; 1)

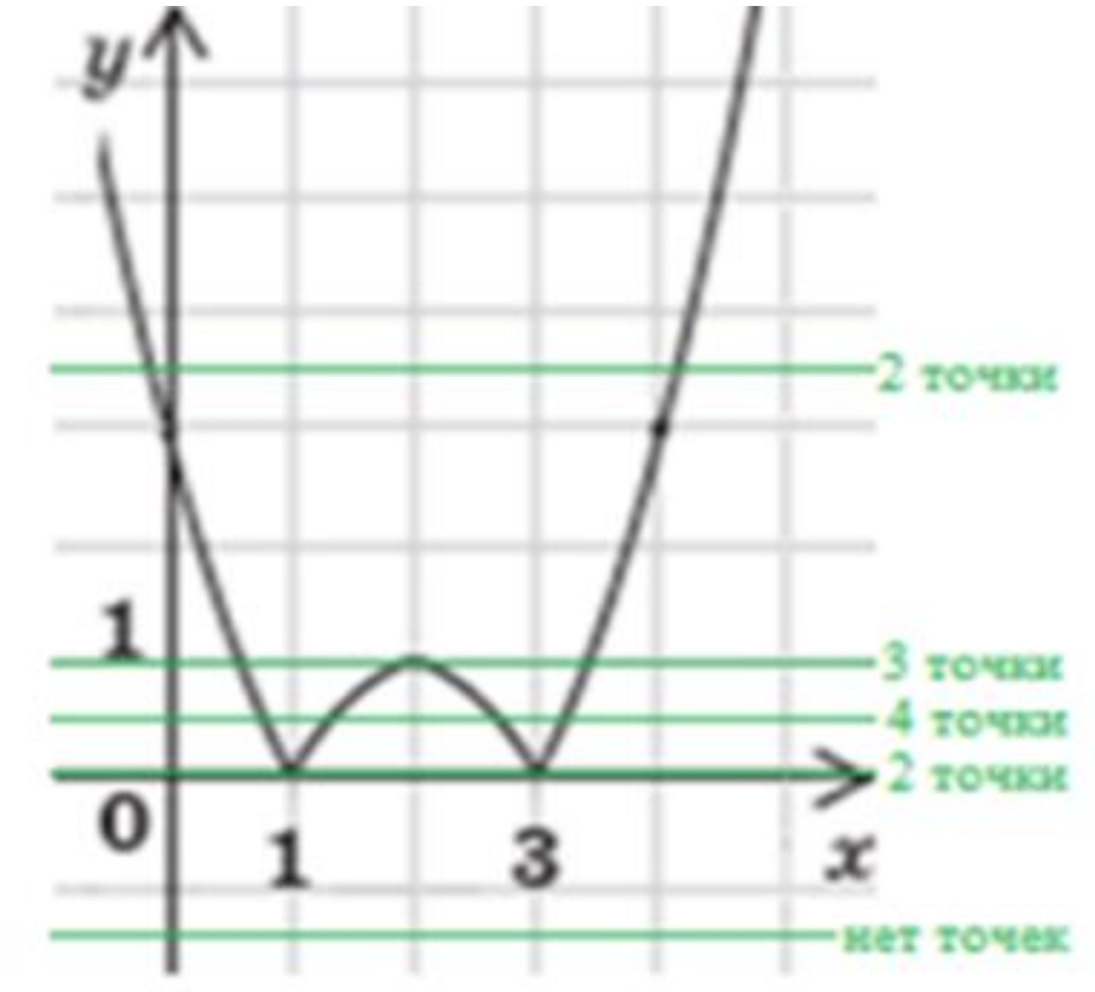
x	1	2	3
y	0	1	0

(1; 0), (3;0) – точки склейки графиков.

окончание

Прямая, параллельная или совпадающая с осью абсцисс, может иметь с построенным графиком функции 0, 2, 3 и 4 точки. Наибольшее число точек – 4.

Ответ: 4.



Задание 22. Пример 2. Решение 2.

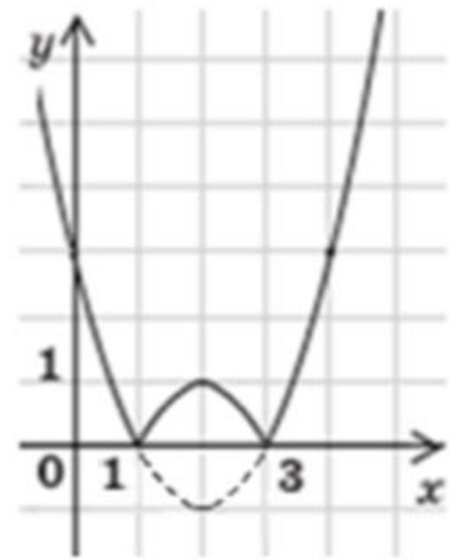
$$|x^2-4x+3|=\begin{cases}x^2-4x+3, x^2-4x+3\geq 0\\ -x^2+4x-3, x^2-4x+3<0\end{cases}$$

$$|x^2-4x+3|=\begin{cases}x^2-4x+3, x\leq 1, x\geq 3\\ -x^2+4x-3, 1<x<3\end{cases}$$

Построим график функции $y=x^2-4x+3$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет координаты (2; – 1).

При x ≤ 1, x ≥ 3 графиком функции $y=|\ x^2-4x+3\ |$ будет часть параболы, расположенная в верхней полуплоскости относительно оси Ox.

При 1 < x < 3 графиком функции $y=|\ x^2-4x+3\ |$ будет другая часть параболы, отображенная симметрично относительно оси Ox в верхнюю полуплоскость координатной плоскости.



Задание 22. Пример 3.

Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

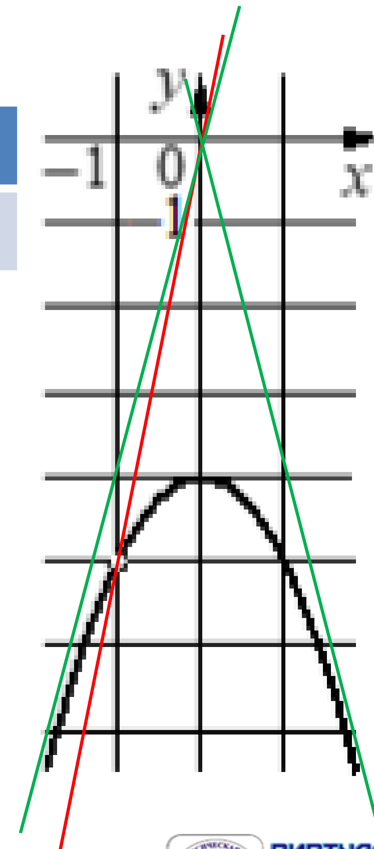
Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 22. Пример 3. Решение.

Преобразуем выражение: $\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x} = -x^2-4$ при $x \neq -1$.

Построим график функции $y=-x^2-4$ при $x \neq -1$ (парабола)
Вершина параболы (0; – 4), ветви направлены вниз.
Точка (– 1; – 5) выколота

x	- 2	- 1	0	1	2
y	- 8	- 5	- 4	-5	- 8



Прямая имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку (– 1; – 5) или если уравнение $-x^2-4=kx$ имеет один корень. Дискриминант уравнения $x^2+kx+4=0$ равен k^2-16, и он должен быть равен нулю $k^2-16=0$

Получаем, что k = 5, k = – 4, k = 4
Ответ: k = 5, k = – 4, k = 4.

Спасибо

за внимание.