

ПРОИЗВОДНАЯ. ПРИМЕНЕНИЕ
ПРОИЗВОДНОЙ К
ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ
ЭКСТРЕМУМЫ
ФУНКЦИИ(№12)

Смолякова Оксана Геннадьевна,
учитель математики МАОУ СОШ №28.г. Томска

Таблица производных

f (x) (функция)	f'(x) (производная)
C (константа)	0
x	1
x^2	2x
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
sin x	cos x
cos x	- sin x
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
ctg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
ln x	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Правила дифференцирования

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

u, v, f - функции
c - константа

Выполнение этапов решения

Найдите **точку минимума** функции $y = x^3 - 48x + 17$

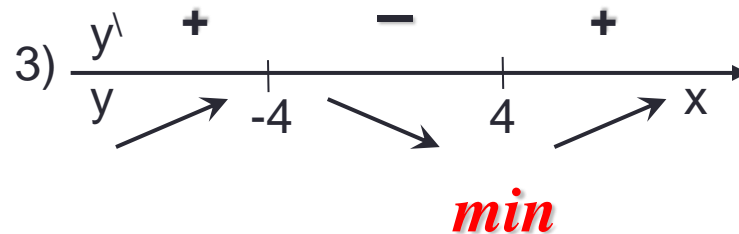
1. Найдем $f'(x)$

$$1) y' = 3x^2 - 48$$

2. Найдем критические точки, решив уравнение $y' = 0$

$$2) y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x - 4)(x + 4) = 0. \quad x = -4; 4$$

3. Проверим знаки производной, выполнить графическую иллюстрацию.



Исследование степенных и иррациональных функций

Найдите **точку максимума** функции $y = x^3 - 75x + 5$

1. Найдём $f'(x)$

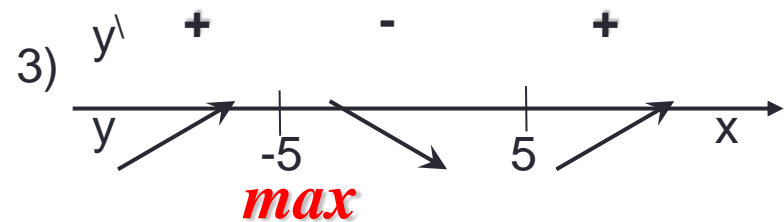
$$1) y' = 3x^2 - 75$$

2. Найдём критические точки, решив уравнение $y' = 0$

$$2) y' = 3x^2 - 75 = 3(x^2 - 25) = 3(x - 5)(x + 5) = 0$$

$$x = 5 \quad x = -5$$

3. Проверим знаки производной, выполним графическую иллюстрацию.



Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку максимума** функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$
2. Найдите **точку минимума** функции $y = -x^3 + 12x + 7$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку максимума** функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Ответ: 0

2. Найдите **точку минимума** функции $y = -x^3 + 12x + 7$

Ответ: -2

Исследование степенных и иррациональных функций

Найдите **точку максимума** функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$

1. Найдём $f'(x)$

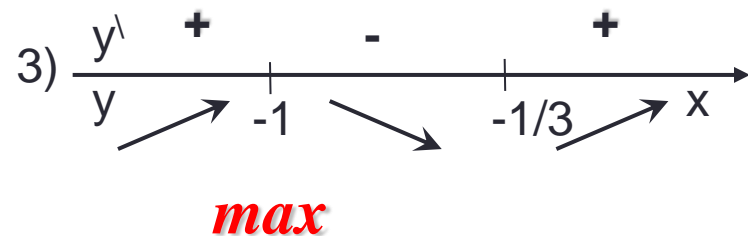
$$1) y' = 3x^2 + 4x + 1$$

2. Найдём критические точки, решив уравнение $y' = 0$

$$2) y' = 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = -1 \qquad x = -1/3$$

3. Проверим знаки производной, выполнить графическую иллюстрацию.



Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку максимума** функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$
2. Найдите **точку минимума** функции $y = x^3 - 10x^2 - 100x - 9$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку максимума** функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 5$

Ответ: 1

2. Найдите **точку минимума** функции $y = x^3 - 10x^2 - 100x - 9$

Ответ: 10

Исследование степенных и иррациональных функций

Найдите **точку минимума** функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$

$$D(y) : x > 0$$

1. Найдем $f'(x)$

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1 \quad 1)$$

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3$$

2 Найдем критические точки, решив уравнение $y' = 0$

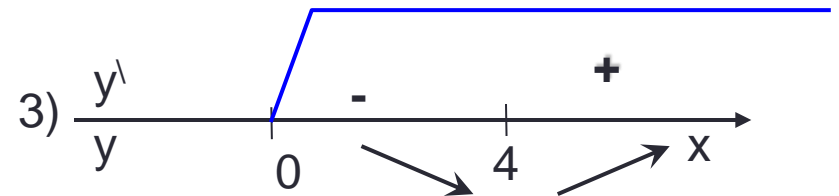
$$2) \quad \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$$

$$3\sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

3. Проверим знаки производной, выполнить графическую иллюстрацию.



min

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку максимума** функции $y = -2x\sqrt{x} + 6x + 7$

2. Найдите **точку минимума** функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку максимума** функции $y = -2x\sqrt{x} + 6x + 7$

Ответ: 4

2. Найдите **точку минимума** функции $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1$

Ответ: 4

Исследование частных

Найдите **точку максимума** функции

$$D(y): x \neq 0$$

1. Найдем $f'(x)$ $y = x + 25 \cdot \frac{1}{x}$

2. Найдем критические точки, решив уравнение $y' = 0$

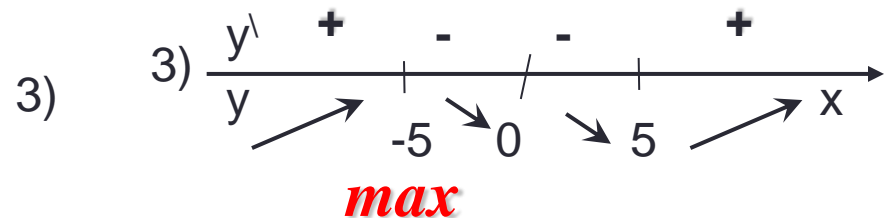
3. Проверим знаки производной, выполнить графическую иллюстрацию.

$$y = \frac{x^2 + 25}{x}$$

$$1) \quad y' = 1 + 25 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = \frac{(x-5)(x+5)}{x^2}$$

$$2) \quad \frac{(x-5)(x+5)}{x^2} = 0$$

$$x \neq 0 \quad x = 5 \quad x = -5$$



Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку максимума** функции

$$y = -\frac{x^2 + 289}{x}$$

2. Найдите **точку минимума** функции

$$y = -\frac{x^2 + 36}{x}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку максимума** функции

$$y = -\frac{x^2 + 289}{x}$$

Ответ: 17

2. Найдите **точку минимума** функции

$$y = -\frac{x^2 + 36}{x}$$

Ответ: -6

Исследование частных

Найдите **точку минимума** функции

$$D(y): x \neq 0$$

1. Найдем $f'(x)$

$$y = 2x + \frac{18}{x} + 8$$

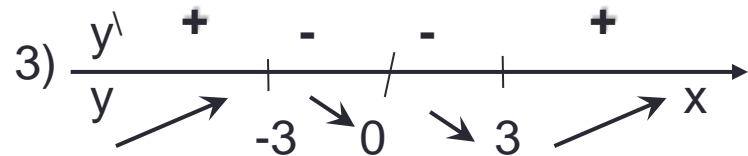
$$1) y' = 2 + 18 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 - \frac{18}{x^2} = \frac{2x^2 - 18}{x^2} = \\ = \frac{2(x-3)(x+3)}{x^2}$$

2. Найдем критические точки, решив уравнение $y' = 0$

$$2) \frac{2(x-3)(x+3)}{x^2} = 0$$

$$x \neq 0 \quad x = -3 \quad x = 3$$

3. Проверим знаки производной, выполнить графическую иллюстрацию.



min

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку минимума** функции $y = x + \frac{25}{x} + 25$

2. Найдите **точку максимума** функции $y = x + \frac{16}{x} + 3$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку минимума** функции $y = x + \frac{25}{x} + 25$

Ответ: 5

2. Найдите **точку максимума** функции $y = x + \frac{16}{x} + 3$

Ответ: - 4

Исследование произведений

Найдите **точку минимума** функции

$$y = (x^2 - 8x + 8) e^{6-x}$$

1. Найдем $f'(x)$

1)

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 - 8x + 8)' e^{6-x} + (x^2 - 8x + 8)(e^{6-x})' = \\ &= (2x - 8)e^{6-x} + (x^2 - 8x + 8)e^{6-x}(-1) = \\ &= e^{6-x}(2x - 8 - x^2 + 8x - 8) = e^{6-x}(-x^2 + 10x - 16) = \\ &= -e^{6-x}(x^2 - 10x + 16) = -e^{6-x}(x - 8)(x - 2) \end{aligned}$$

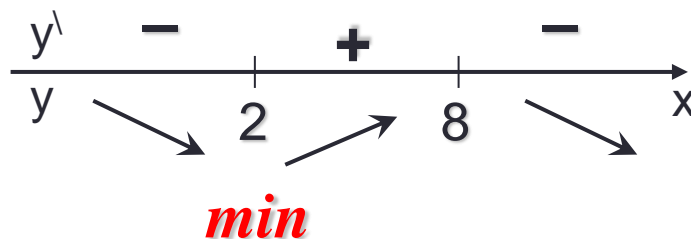
2. Найдем критические точки, решив уравнение $y' = 0$

2)

$$\begin{aligned} -e^{6-x}(x - 8)(x - 2) &= 0 \\ x = 8 \qquad \qquad \qquad x &= 2 \end{aligned}$$

3. Проверим знаки производной, выполнить графическую иллюстрацию.

3)



Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку минимума** функции $y = (2x^2 - 38x + 38)e^{x-25}$.

Ответ: 17

2. Найдите **точку максимума** функции $y = (x^2 - 10x + 10)e^{5-x}$.

Ответ: 10

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **наименьшее** значение функции $y = (8 - x)e^{9-x}$ на отрезке $[3; 10]$
Ответ: -1
2. Найдите **наибольшее** значение функции $y = (20 - x)e^{x-19}$ на отрезке $[17; 29]$
Ответ: 1

Исследование произведений

Найдите **точку минимума** функции $y = (x + 3)^2(x + 5) - 1$.

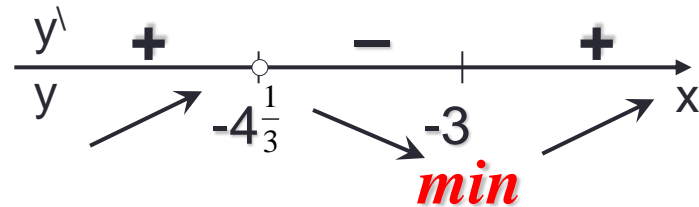
1. Найдем $f'(x)$

$$\begin{aligned}y' &= ((x + 3)^2)'(x + 5) + (x + 3)^2(x + 5)' - (1)' = \\ &= 2(x + 3)(x + 5) + (x + 3)^2 = \\ &= (x + 3) \cdot (2(x + 5) + (x + 3)) = (x + 3)(3x + 13).\end{aligned}$$

2. Найдем критические точки
решив уравнение $y' = 0$

$$(x + 3)(3x + 13) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = -4\frac{1}{3}. \end{cases}$$

3. Проверим знаки
производной, выполнить
графическую иллюстрацию



Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку минимума** функции $y = (x - 7)^2(x + 6) + 3$.

1. Найдите **точку максимума** функции $y = (x - 2)^2(x - 4) + 5$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку минимума** функции $y = (x - 7)^2(x + 6) + 3$.

Ответ: 7

1. Найдите **точку максимума** функции $y = (x - 2)^2(x - 4) + 5$.

Ответ: 2

Исследование показательных и логарифмических функций

Найдите **точку минимума** функции $y = 2x - \ln(x+3) + 7$

$$D(y) : x + 3 > 0$$
$$x > -3$$

1. Найдем $f'(x)$

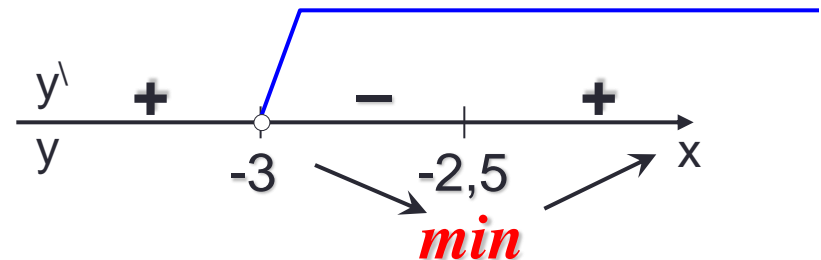
$$1) \quad y' = 2 - \frac{1}{x+3} = \frac{2x+6-1}{x+3} = \frac{2x+5}{x+3}$$

2. Найдем критические точки решив уравнение $y' = 0$

$$2) \quad y' = \frac{2x+5}{x+3} = 0, x = -2,5; x \neq -3$$

3. Проверим знаки производной, выполнить графическую иллюстрацию, заметим, что точка $x = -3$ не входит в область определения функции

3)



Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку минимума** функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$
2. Найдите **точку максимума** функции $y = \ln(x+5)^{15} - 5x$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку минимума** функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$

Ответ: -2

2. Найдите **точку максимума** функции $y = \ln(x+5)^{15} - 5x$

Ответ: -4

Исследование тригонометрических функций

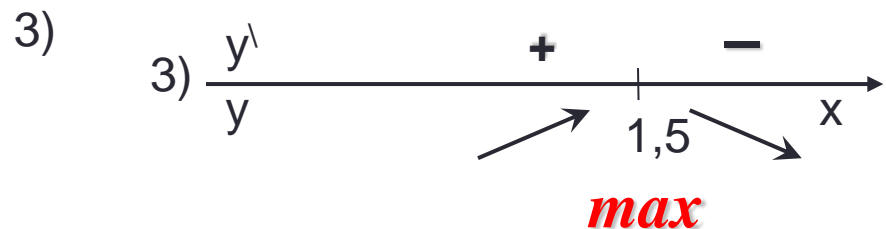
Найдите **точку максимума** функции $y = (2x - 3) \cos x - 2 \sin x + 5$
принадлежащую промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$.

1. Найдем $f'(x)$ 1) $y' = 2 \cos x + (3 - 2x) \sin x - 2 \cos x = (3 - 2x) \sin x$.

2) На заданном промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$ синус не обращается в нуль и принимает только положительные значения. Поэтому единственный нуль производной $x = 1,5$.

2. Найдем критические точки решив уравнение $y' = 0$

3. Проверим знаки производной, выполнить графическую иллюстрацию



Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку минимума** функции $y = (6 - 4x)\cos x + 4\sin x + 14$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
2. Найдите **точку максимума** функции $y = (2x - 1)\cos x - 2\sin x + 5$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите **точку минимума** функции $y = (6 - 4x)\cos x + 4\sin x + 14$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ Ответ: 1,5

2. Найдите **точку максимума** функции $y = (2x - 1)\cos x - 2\sin x + 5$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ответ: 0,5

Спасибо за внимание!