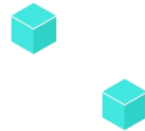


**BIT**  
**EDUCATION**  
КАДРЫ ДЛЯ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ

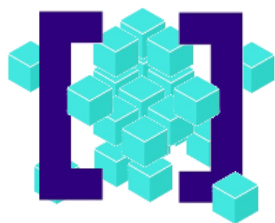


**ВИРТУАЛЬНАЯ  
ТВОРЧЕСКАЯ  
ЛАБОРАТОРИЯ**

## Лекция «Математические модели реальных ситуаций»

Борисова Наталья Васильевна, учитель  
математики МБОУ РКГ №2 г. Томска

МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
РУССКАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ ГИМНАЗИЯ № 2 г. ТОМСКА



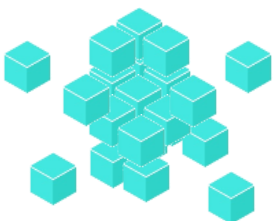
**BIT**  
**EDUCATION**  
КАДРЫ ДЛЯ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ



**ВИРТУАЛЬНАЯ  
ТВОРЧЕСКАЯ  
ЛАБОРАТОРИЯ**

Первый тип задач.

**Задачи на работу**



# Математические модели реальных ситуаций

## Задача 1.

Коля и Митя выполняют одинаковый тест. Коля отвечает за час на 12 вопросов теста, а Митя — на 21. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Коля закончил свой тест позже Мити на 105 минут. Сколько вопросов содержит тест?

## Решение.

1. Пусть  $x$  — число вопросов теста. Тогда время, необходимое Коле, равно  $\frac{x}{12}$  ч, а время, необходимое Мите, равно  $\frac{x}{21}$  ч., если Коля закончил отвечать на тест через  $\frac{105}{60}$  часа после Мити.

## 2. Составим и решим уравнение:

$$\frac{x}{12} = \frac{x}{21} + \frac{105}{60}$$

$$\frac{x}{12} = \frac{x}{21} + \frac{7 \cdot 84}{4 \cdot 1}$$

$$\frac{x}{12} \cdot \frac{84}{1} = \frac{x}{21} \cdot \frac{84}{1} + \frac{7 \cdot 84}{4 \cdot 1}$$

$$7x = 4x + 147$$

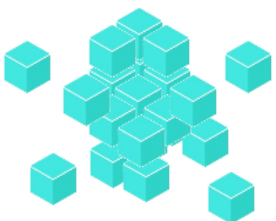
$$3x = 147$$

$$x = 147:3$$

$$x = 49$$

3. Вернемся к обозначенному:  $x=49$  вопросов было в тесте.

Ответ: 49 вопросов.



## Математические модели реальных ситуаций

**Задача 2.** Один мастер сможет выполнить заказ за 3 часа, а другой – за 6 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

**Замечание.**

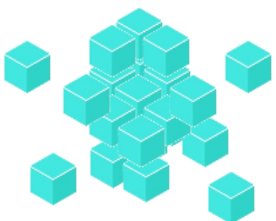
Первый мастер может выполнить некоторую работу за  $a$  часов, а второй мастер – за  $b$  часов. За какое время выполнят работу оба мастера, работая вдвоем? Поскольку объем работы не задан, его можно принять равным единице. Тогда первый мастер за один час

выполнит часть работы - равную  $\frac{1}{a}$ , второй -  $\frac{1}{b}$ , а

оба мастера – часть работы, равную  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ . Значит, всю работу они

выполнят за время –  $t = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

**Решение.** Пусть весь объем работы равен 1.



## Математические модели реальных ситуаций

**Задача 2. (Продолжение)** Один мастер сможет выполнить заказ за 3 часа, а другой – за 6 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

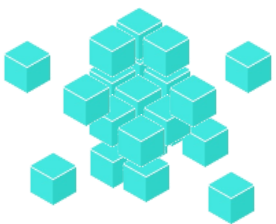
**Решение.** Пусть весь объем работы равен 1.

Мастер	Производительность - N (объем работы за единицу времени)	Время – t	Работа - A
Первый	$\frac{1}{3}$	3 ч	1
Второй	$\frac{1}{6}$	6 ч	1

**2. Составим и решим уравнение:**

$$t = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{2}{6} + \frac{1}{6}} = 1 : \frac{3}{6} = 1 \cdot \frac{6}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ (ч)}$$

**Ответ:** Оба мастера выполнят заказ за 2 часа



# Математические модели реальных ситуаций

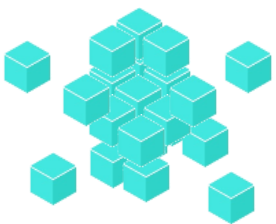
**Задача 3.** Первая труба пропускает на 12 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды пропускает первая труба, если бак объемом 160 литров она заполняет на 12 минут дольше, чем вторая труба?

**Решение.** Пусть  $x$  л/час пропускает первая труба.

Труба	Производительность - $N$ (объем работы за единицу времени)	Время - $t$	Работа - $A$
Первый	$x$ ( $x > 0$ )	$\frac{160}{x}$ на 12 минут больше	160
Второй	$x + 12$	$\frac{160}{x + 12}$	160

**2. Составим и решим уравнение:**  $\frac{160}{x} - \frac{160}{x+12} = 12$

$$\frac{160 \cdot (x+12)}{x} - \frac{160 \cdot x}{x+12} - \frac{12 \cdot x(x+12)}{1} = 0$$



# Математические модели реальных ситуаций

**Задача 3. (Продолжение)** Первая труба пропускает на 12 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды пропускает первая труба, если бак объемом 160 литров она заполняет на 12 минут дольше, чем вторая труба?

**2. Составим и решим уравнение:**  $\frac{160}{x} - \frac{160}{x+12} = 12$

$$\frac{160 \setminus (x+12)}{x} - \frac{160 \setminus x}{x+12} - \frac{12 \setminus x(x+12)}{1} = 0$$

$$\frac{160x + 1920 - 160x - 12x^2 - 144x}{x(x+12)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -12x^2 - 144x + 1920 = 0, \\ x(x+12) \neq 0, x \neq 0, x \neq -12 (*) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -12x^2 - 144x + 1920 &= 0 /(-12) \\ x^2 + 12x - 160 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-160) = 144 + 640 = 784, D > 0 - 2 \text{ действительных корня}$$

$$\sqrt{D} = 28$$

$$x_1 = -20 \in (*), x_2 = 8 \in (*)$$

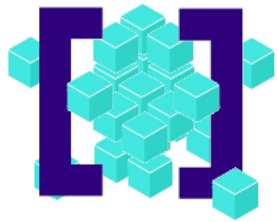
**3. Вернемся к обозначенному:**  $x = -20$  – не удовлетворяет условию задачи, так как скорость выполнения работы – именованная величина всегда число положительное.

Тогда  $x = 8$  (л/мин) – пропускает первая труба.

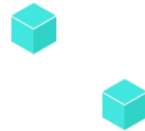
Ответ: 8л/мин



МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
РУССКАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ ГИМНАЗИЯ № 2 г. ТОМСКА



**BIT**  
**EDUCATION**  
КАДРЫ ДЛЯ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ

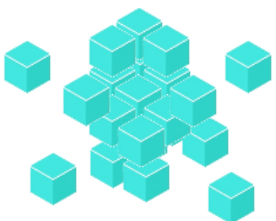


**ВИРТУАЛЬНАЯ  
ТВОРЧЕСКАЯ  
ЛАБОРАТОРИЯ**

Второй тип задач.

## Задачи на движение





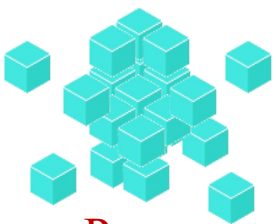
# Математические модели реальных ситуаций

## • Задача 4.

Два автомобиля отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость автомобиля, пришедшего к финишу вторым.

**Решение.** 1. Пусть  $x$  км/ч скорость второго автомобиля.

автомобиль	$V$ , км/ч	$t$ , ч	$S$ , км
1	$x+10$	$\frac{420}{x+10} < \text{на } 1 \text{ ч}$	420
2	$x$ -?	$\frac{420}{x}$	420



# Математические модели реальных ситуаций

Решение задачи 4. (Продолжение)

1. Пусть  $x$  км/ч скорость первого автомобиля.

автомобиль	$V$ , км/ч	$t$ , ч	$S$ , км
1	$x+10$	$\frac{420}{x+10} < \text{на } 1 \text{ ч}$	420
2	$x - ?$	$\frac{420}{x}$	420

2. Составим и решим уравнение:  $\frac{420}{x} - 1 = \frac{420}{x+10}$

$$\frac{420 \cdot (x+10)}{x(x+10)} - \frac{420 \cdot x}{x(x+10)} - \frac{1 \cdot (x(x+10))}{x(x+10)} = 0$$

$$\frac{420x + 4200 - 420x - x^2 - 10x}{x(x+10)} = 0$$

$$\begin{cases} -x^2 - 10x + 4200 = 0 \quad (1), \\ x(x+10) \neq 0, x \neq 0, x \neq -10 \quad (*) \end{cases}$$



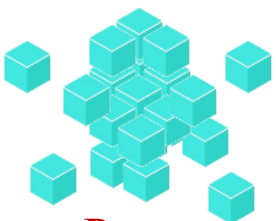
1. Переносим выражение из правой части в левую, поменяв знак на противоположный, и находим общий знаменатель.



2. Решаем уравнение помня: дробь равно нулю если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) = 0, \\ P(x) \neq 0. \end{cases}$$





# Математические модели реальных ситуаций

Решение задачи 4. (Продолжение шага 2)

$$\begin{cases} -x^2 - 10x + 4200 = 0 (1), \\ x(x + 10) \neq 0, x \neq 0, x \neq -10(*) \end{cases}$$

$$(1) -x^2 - 10x + 4200 = 0 /(-1)$$
$$x^2 + 10x - 4200 = 0$$

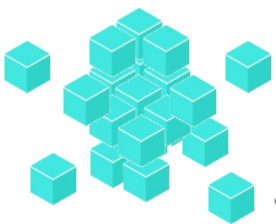
$$x_1 = 60 \in (*), x_2 = -70 \in (*).$$

3. Вернемся к обозначенному:  $x = -70$  – не удовлетворяет условию задачи, так как скорость – именованная величина всегда число положительное.

Тогда  $x = 60$  ( км/ч) – скорость второго автомобиля.

Ответ: 60 км/ч.





## Математические модели реальных ситуаций

### Задача 5.

Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

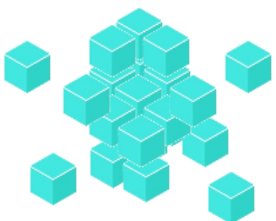
Решение. 1. Пусть  $x$  км/ч скорость лодки в неподвижной воде.

лодка	$V$ , км/ч	$t$ , ч	$S$ , км
путь по течению	$x + 3$	$\frac{24}{x+3} < \text{на } \frac{1}{3} \text{ ч}$	24
путь против течения	$x - 3$	$\frac{24}{x - 3}$	24

$$20 \text{ мину} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \text{ ч}$$

$$2. \text{ Составим и решим уравнение : } \frac{24}{x+3} + \frac{1}{3} = \frac{24}{x-3}$$





# Математические модели реальных ситуаций

## Задача 5.

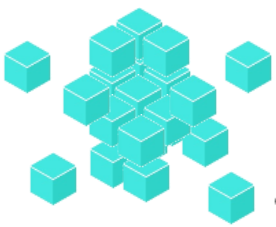
Решение. (Продолжение)

2. Составим и решим уравнение :  $\frac{24}{x+3} + \frac{1}{3} = \frac{24}{x-3}$

$$\frac{24 \cdot 3(x-3)}{3(x+3)(x-3)} + \frac{1 \cdot (x+3)(x-3)}{3(x+3)(x-3)} - \frac{24 \cdot 3(x+3)}{3(x+3)(x-3)} = 0$$
$$\frac{72x - 216 + x^2 - 9 - 72x - 216}{3x(x+3)} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 441 = 0 (1), \\ 3x(x+3) \neq 0, x \neq 0, x \neq -3(*) \end{cases}$$





## Математические модели реальных ситуаций

Задача 5.

Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

Решение. (Продолжение шага 2.)

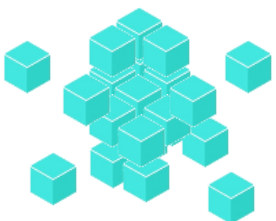
$$\begin{cases} x^2 - 441 = 0 \quad (1), \\ 3x(x + 3) \neq 0, x \neq 0, x \neq -3 \quad (*) \end{cases}$$
$$(1) x^2 - 441 = 0$$

$$x_1 = 21 \in (*), x_2 = -21 \in (*).$$

3. Вернемся к обозначенному:  $x = -21$  – не удовлетворяет условию задачи, так как скорость – именованная величина всегда число положительное.

Тогда  $x = 21$  ( км/ч) – скорость лодки в неподвижной воде.

Ответ: 21 км/ч.



## Математические модели реальных ситуаций

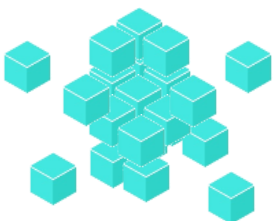
**Задача 6.** Поезд двигаясь со скоростью 140 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего параллельно путям со скоростью 4 км/ч навстречу поезду, за 10 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

**Решение.**

- 1)  $140 + 4 = 144$  ( км/ч) – скорость сближения пешехода и поезда;
- 2)  $144 \text{ км/ч} = \frac{144 \cdot 1000}{3600} = 40 \text{ м/с}$  ;
- 3)  $40 \cdot 10 = 400$  (м) – длина поезда.

Ответ: 400 м





## Математические модели реальных ситуаций

**Задача 7.** Первые 200 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км – со скоростью 90 км/ч, а последние 180 км – со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

*Замечание.* Чтобы найти среднюю скорость надо весь путь разделить на все затраченное время на весь путь.

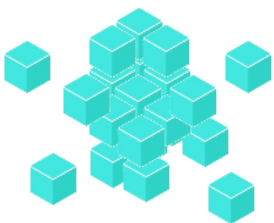
$$V_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{весь путь}}}{t_{\text{все время}}}$$

**Решение.**

- 1)  $200 + 180 + 180 = 560$  (км) – весь путь;
- 2)  $\frac{200}{50} + \frac{180}{90} + \frac{180}{45} = 4 + 2 + 4 = 10$  (ч) – время, затраченной на весь путь;
- 3)  $\frac{560}{10} = 56$  (км/ч) – средняя скорость автомобиля.

Ответ: 56 км/ч





# Математические модели реальных ситуаций

**Задача 8.** Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 16 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого?

**Решение. 1.** Пусть  $x$  км/ч скорость первого мотоциклиста и  $t$ - время через которое мотоциклисты поравняются первый раз.

МОТОЦИКЛИСТЫ	$V$ , км/ч	$t$ , ч	$S$ , км
I	$x$	$t$	$x \cdot t$
II	$x+10$	$t$	$(x+10) \cdot t - 0,5 \cdot 16$

**2. Составим и решим уравнение.**

$$x \cdot t = (x+10) \cdot t - 0,5 \cdot 16$$

$$x \cdot t = x \cdot t + 10t - 8$$

$$-10t = -8$$

$$t = -8 : (-10)$$

$$t = 0,8$$

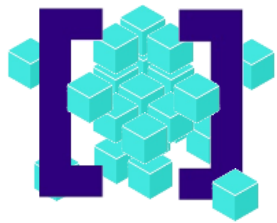
**3. Вернемся к обозначенному** -  $t = 0,8$  (ч) – время через которое мотоциклисты поравняются в первый раз.

$$0,8 \text{ ч} = \frac{8}{10} \cdot \frac{60}{1} = 48 \text{ минут.}$$

Ответ: 48 минут



МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
РУССКАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ ГИМНАЗИЯ № 2 г. ТОМСКА



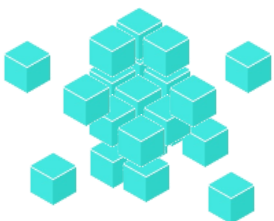
**BIT**  
**EDUCATION**  
КАДРЫ ДЛЯ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ



**ВИРТУАЛЬНАЯ  
ТВОРЧЕСКАЯ  
ЛАБОРАТОРИЯ**

Третий тип задач.

## Задачи на проценты, смеси и сплавы



## Математические модели реальных ситуаций



**Задача 9.** Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

**Решение.** 1. Пусть  $x$  кг – масса 1 раствора,  $y$  кг – масса 2 раствора.

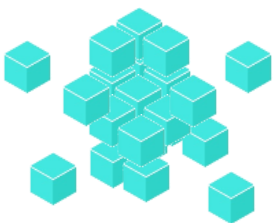
растворы	масса раствора, кг	% содержание кислоты	масса кислоты, кг
1	$x$	30	$0,3x$
2	$y$	60	$0,6y$
(1+2+вода)	$x+y+10$	36	$0,36(x+y+10)$
или (1+2+ 5 воды +5 кислоты)	$x+y+10$	41	$0,41(x+y+ 10)$

10 кг – 100% Тогда  $t = \frac{10 \cdot 50}{100} = 5$  (кг) – масса кислоты, содержащейся в 10кг 50%

$t$  кг - 50%

раствора.





## Математические модели реальных ситуаций



Решение задачи 9. (Продолжение)

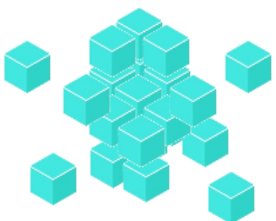
растворы	масса раствора, кг	% содержание кислоты	масса кислоты, кг
1	$x$	30	$0,3x$
2	$y$	60	$0,6y$
(1+2+вода)	$x+y+10$	36	$0,36(x+y+10)$
или (1+2+5+5)	$x+y+10$	41	$0,41(x+y+10)$

2. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,3x + 0,6y = 0,36(x + y + 10) \\ 0,3x + 0,6y + 0,5 \cdot 10 = 0,41(x + y + 10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30x + 60y = 36x + 36y + 360 \\ 30x + 60y + 500 = 41x + 41y + 410 \end{cases}$$





## Математические модели реальных ситуаций



Решение задачи 9. (Продолжение)

2. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4y - x = 60 \\ 11x - 19y = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y - 60 \\ 11(4y - 60) - 19y = 90 \end{cases}$$

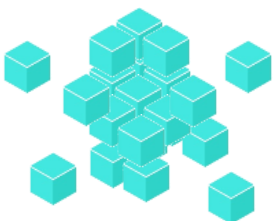
$$\begin{cases} x = 4y - 60 \\ 25y = 750 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 60 \\ y = 30 \end{cases}$$

3. Вернемся к обозначенному:  $x = 60$  (кг) – 30% раствора необходимо взять.

Ответ: 60 кг





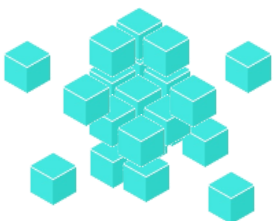
## Математические модели реальных ситуаций



**Задача 10.** Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%.  
Сколько килограммов винограда требуется для  
получения 20 килограммов изюма?

### *Коментарии:*

Если вам встретилась задача «о продуктах», то есть такая, где из винограда получается изюм, из абрикосов урюк, из хлеба сухари или из молока творог — знайте, что на самом деле это **задача на растворы**. Виноград мы тоже можем условно изобразить как раствор. В нем есть **вода** и «**сухое вещество**». У «**сухого вещества**» сложный химический состав, а по его вкусу, цвету и запаху мы могли бы понять, что это именно виноград, а не картошка. Изюм получается, когда из винограда испаряется вода. При этом количество «сухого вещества» **остаётся постоянным**.



## Математические модели реальных ситуаций



**Задача 10.** Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%.

Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?

**Решение:** 1. Пусть  $x$  кг масса винограда.

Продукт	Масса продукта, кг	Масса сухого вещества в продукте, кг
виноград	$x$	$0,1x$
изюм	20	$0,95 \cdot 20$

**2. Составим и решим уравнение:** так как масса сухого вещества неизменна, то  $0,1x = 0,95 \cdot 20$

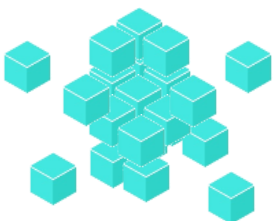
$$0,1x = 19$$

$$x = 190$$

**3. Вернемся к обозначенному:**  $x = 190$  ( кг)- винограда надо взять чтобы получить 20 кг изюма.

Ответ: 190 кг .





## Математические модели реальных ситуаций

### Задача 11.

Ежемесячный доход семьи складывается из зарплаты отца и зарплаты матери. Зарплату отца увеличили на 5%, а зарплату матери – на 75%, в результате чего семейный доход увеличился на 15%. Во сколько раз зарплата матери до повышения была меньше зарплаты отца?

Общий доход семьи:	Доход семьи после увеличения на 15%	
$X$ - заработок отца	100%+5%=105%	1,05 $X$ -заработок отца
$Y$ - заработок матери	100%+75%=175%	1,75 $Y$ -заработок матери
$X + Y$		1,05 $X$ + 1,75 $Y$

семейный доход увеличился на 15%

$$1,15(X + Y) = 1,05X + 1,75Y$$

$$1,15X + 1,15Y = 1,05X + 1,75Y$$

$$1,15X - 1,05X = 1,75Y - 1,15Y$$

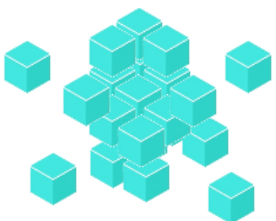
$$0,1X = 0,6Y$$

$$X = 6Y \quad \text{зарплата матери до повышения была меньше зарплаты отца в 6 раз}$$

Ответ: в 6 раз.







# Лекция «Математические модели реальных ситуаций»

## Спасибо за внимание!

