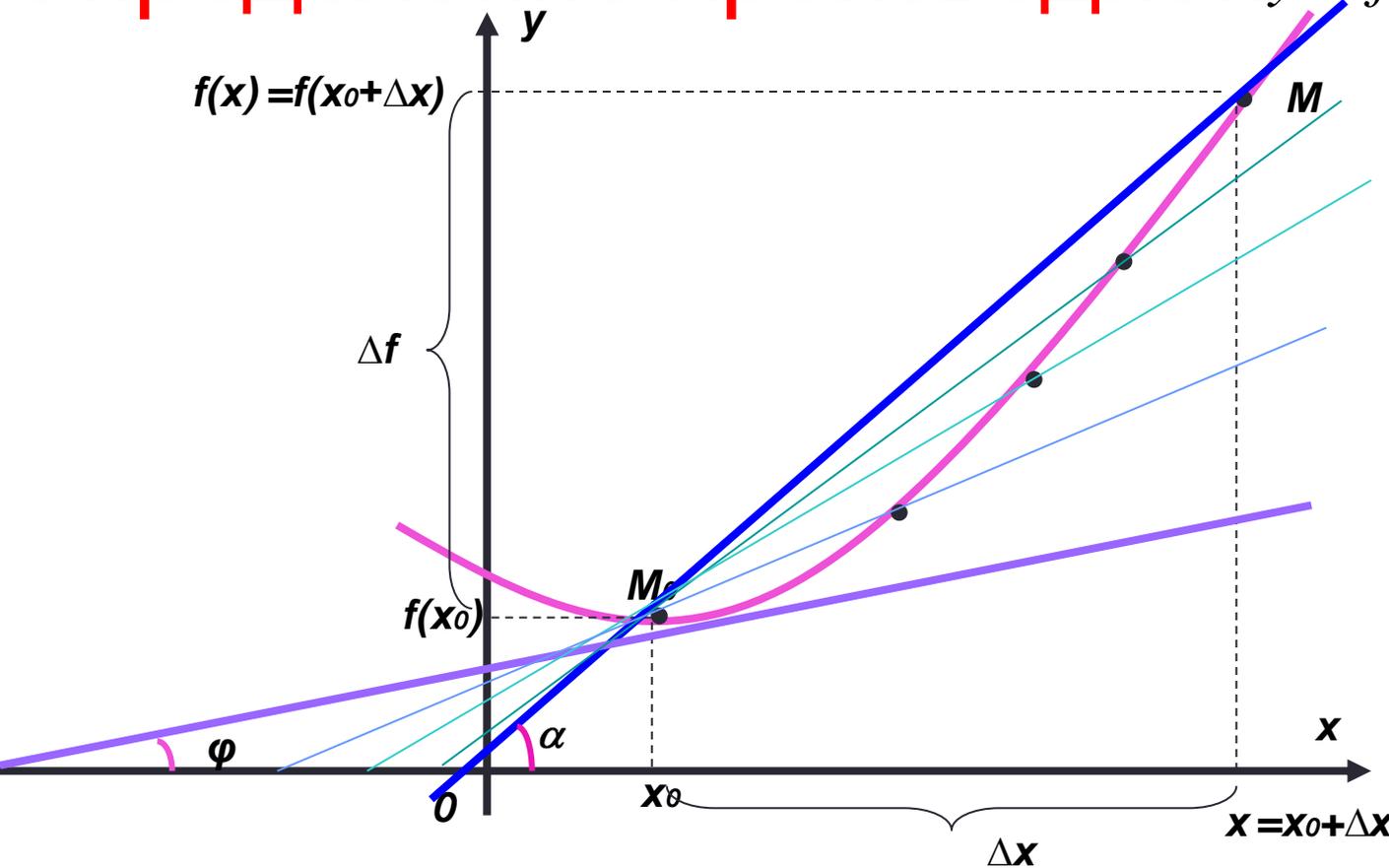


ПРОИЗВОДНАЯ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Анопова Елена Ивановна,
учитель математики МАОУ СОШ №28.г. Томска

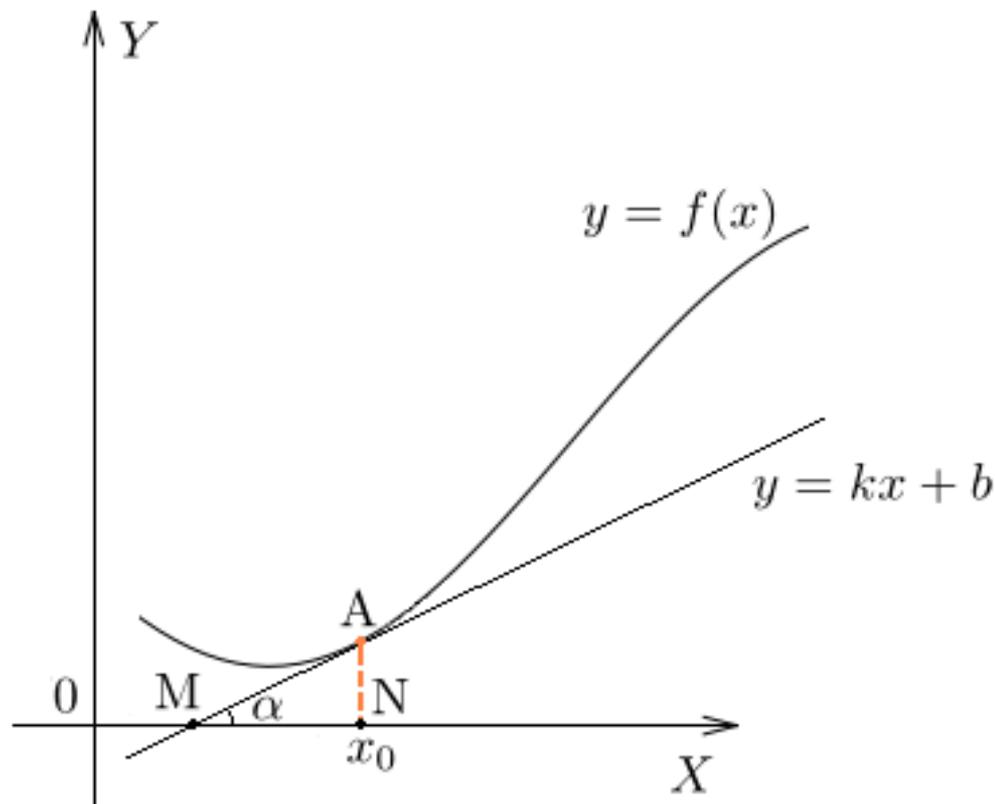
Определение производной $y = f(x)$



Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при последнем стремящимся к нулю

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной



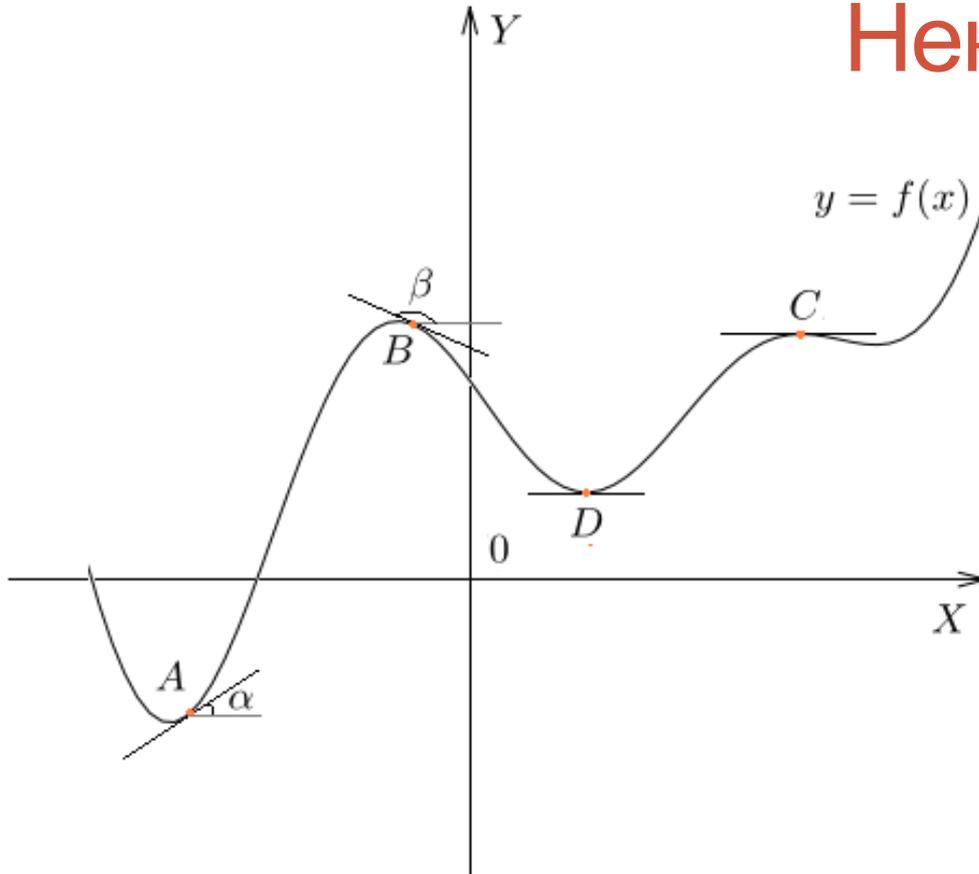
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{AN}{MN}$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

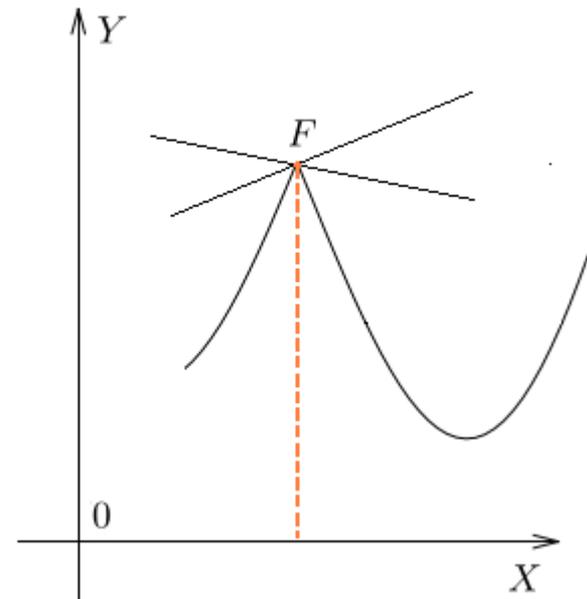
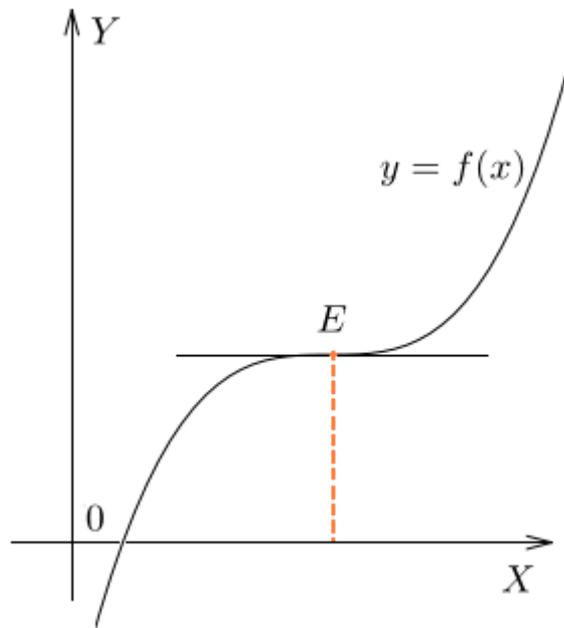
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

Некоторые выводы



- Если производная положительна, то функция возрастает.
- Если производная отрицательная, то функция убывает.
- В точке максимума производная равна нулю и меняет знак с «плюса» на «минус».
- В точке минимума производная тоже равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс».

Сделаем два небольших уточнения



Точки E , F не являются ни максимумом, ни минимумом !

Таблица производных

f (x) (функция)	f'(x) (производная)
C (константа)	0
x	1
x^2	2x
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
sin x	cos x
cos x	- sin x
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
ctg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
ln x	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Правила дифференцирования

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

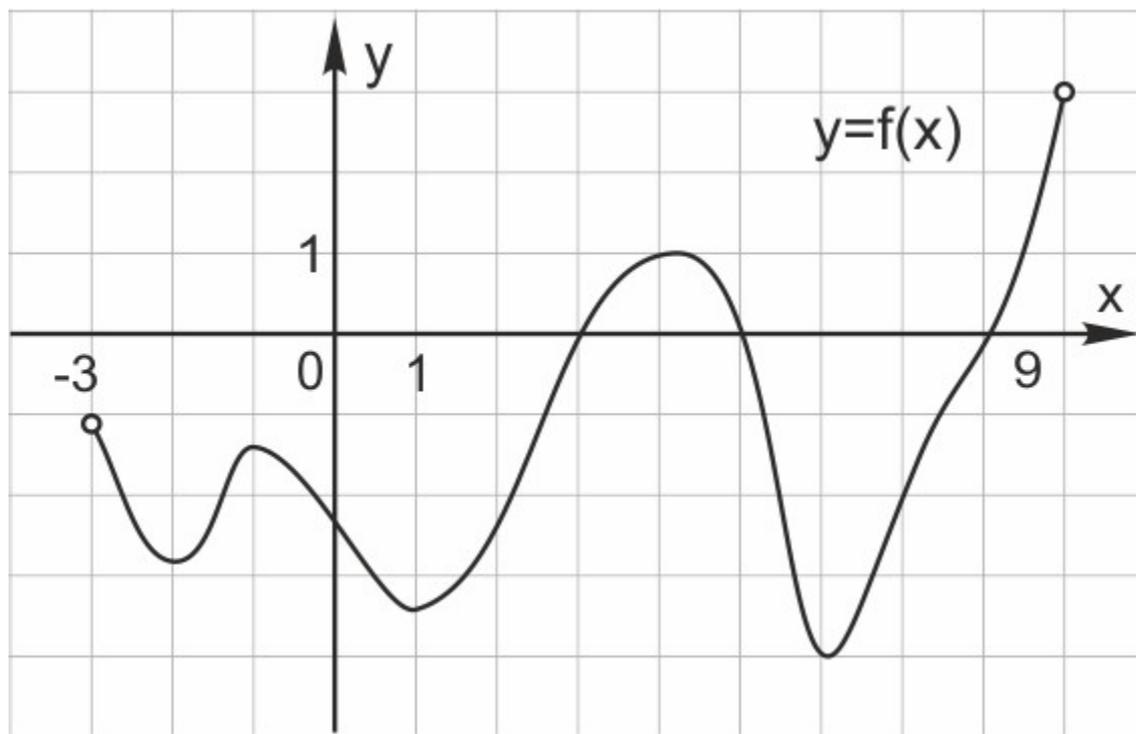
$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

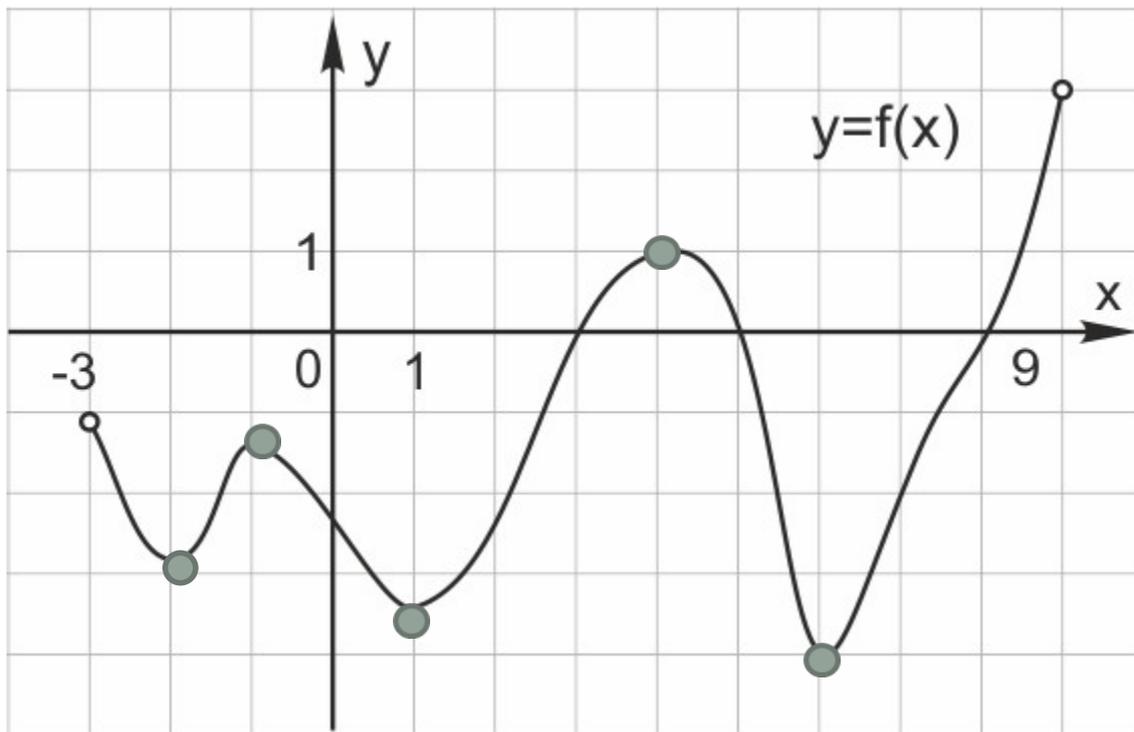
$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

u, v, f - функции
c - константа

На рисунке изображен *график функции $y=f(x)$* , определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество точек, в которых *производная функции $f(x)$ равна 0*.

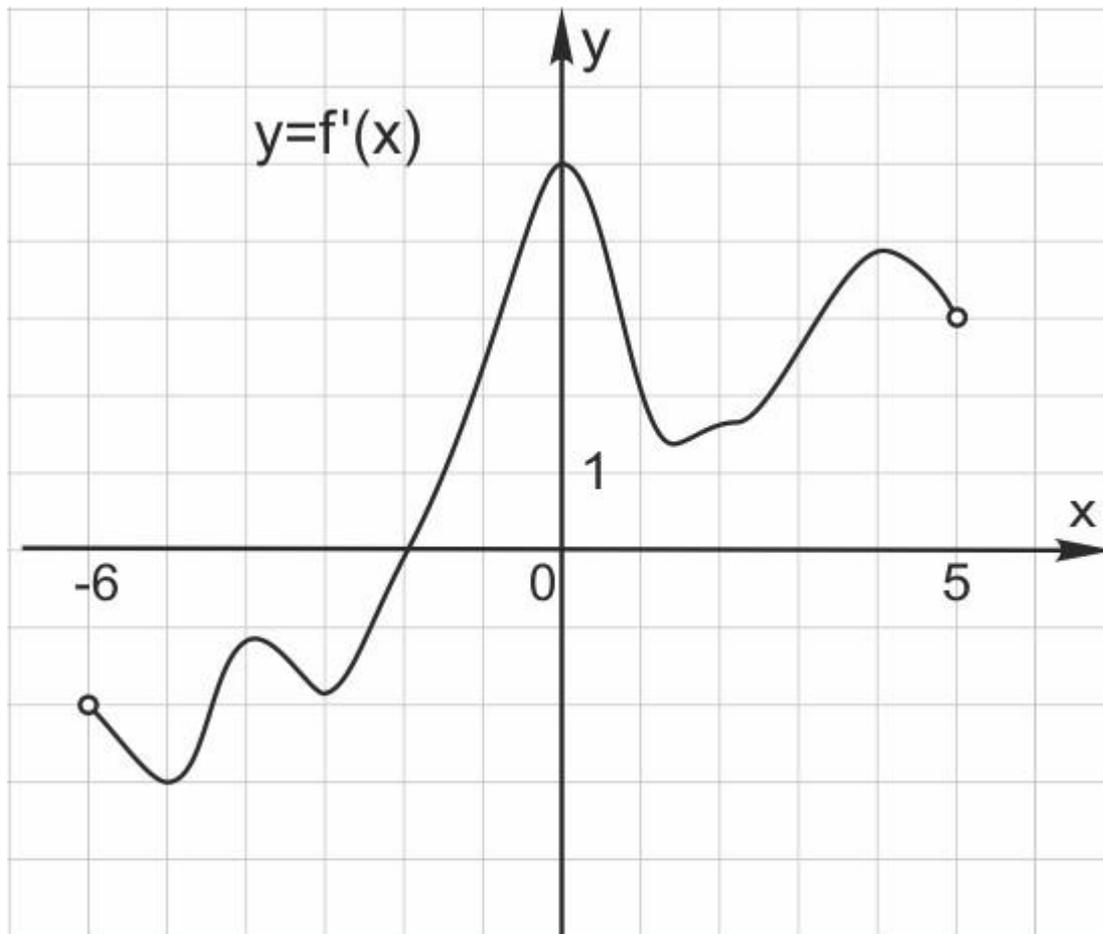


На рисунке изображен *график функции $y=f(x)$* , определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество точек, в которых *производная функции $f(x)$ равна 0*.

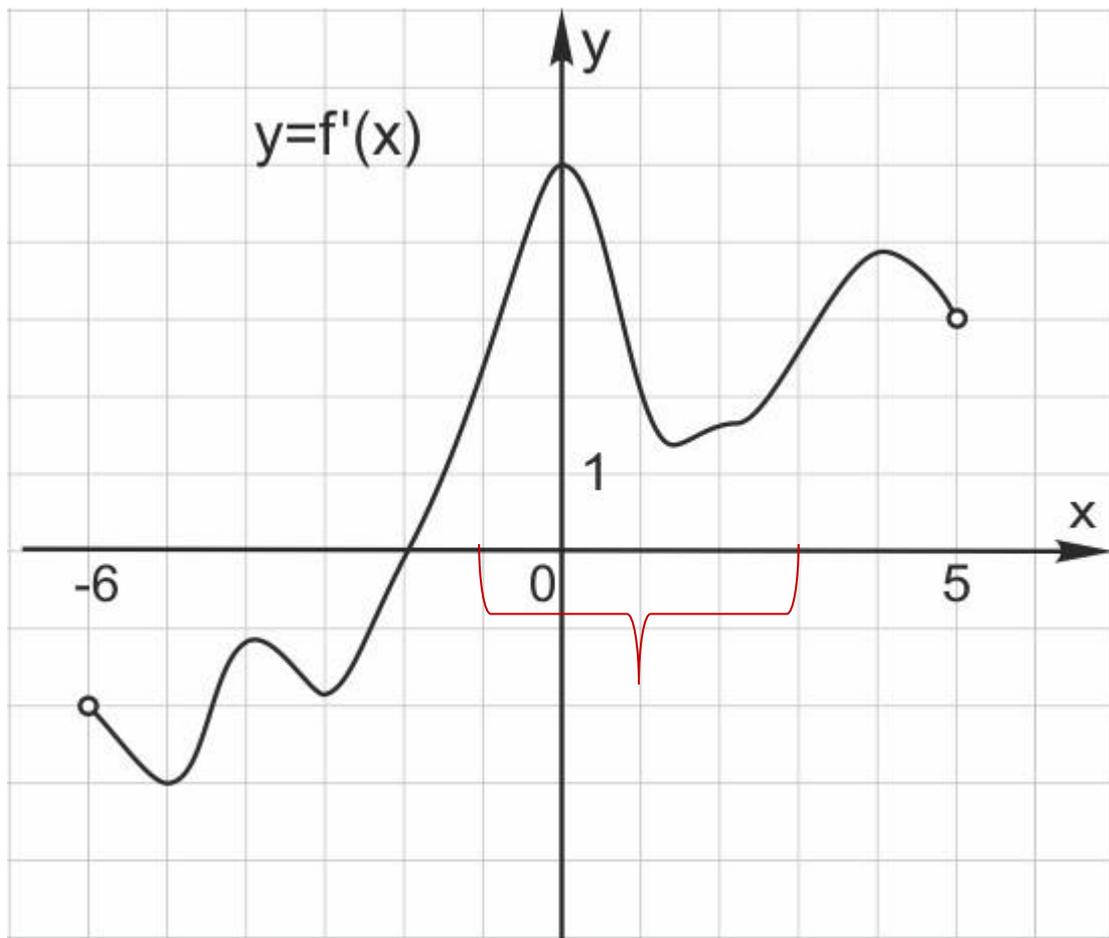


Ответ: 5.

На рисунке изображён **график $y = f'(x)$** — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-1; 3]$ функция $f(x)$ принимает **наибольшее значение**?



На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-1; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Прототип задания 7(№27485)

Прямая $y=7x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+6x-8$.
Найдите абсциссу точки касания.

Прототип задания 7(№27485)

Прямая $y=7x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+6x-8$.
Найдите абсциссу точки касания.

$$k=7, \text{ значит } f'(x_0)=7$$

находим производную функции $y=x^2+6x-8$,
получаем:

$$f'(x)=2x+6; \quad f'(x_0)=2x_0+6$$

$$f'(x_0)=7$$

$$2x_0+6=7$$

$$2x_0=1$$

$$x_0=0,5$$

Ответ: $x_0=0,5$

Задания для самостоятельного решения

Задание 7 (№ 6009)

Прямая $y=6x+8$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2-3x+5$. Найдите абсциссу точки касания.

Задание 7 (№ 6011)

Прямая $y=7x+11$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+8x+6$. Найдите абсциссу точки касания.

Задание 7 (№ 6013)

Прямая $y=4x+8$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2-5x+7$. Найдите абсциссу точки касания.

Задание 7 (№ 6015)

Прямая $y=3x+6$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2-5x+8$. Найдите абсциссу точки касания.

Задание 7 (№ 6017)

Прямая $y=8x+11$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+5x+7$. Найдите абсциссу точки касания.

Задание 7 (№ 6019)

Прямая $y=-5x+4$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+3x+6$. Найдите абсциссу точки касания.

Задания для самостоятельного решения

Задание 7 (№ 6009)

Прямая $y=6x+8$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2-3x+5$. Найдите абсциссу точки касания.

Задание 7 (№ 6011)

Прямая $y=7x+11$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+8x+6$. Найдите абсциссу точки касания.

Задание 7 (№ 6013)

Прямая $y=4x+8$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2-5x+7$. Найдите абсциссу точки касания.

Задание 7 (№ 6015)

Прямая $y=3x+6$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2-5x+8$. Найдите абсциссу точки касания.

Задание 7(№ 6017)

Прямая $y=8x+11$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+5x+7$. Найдите абсциссу точки касания.

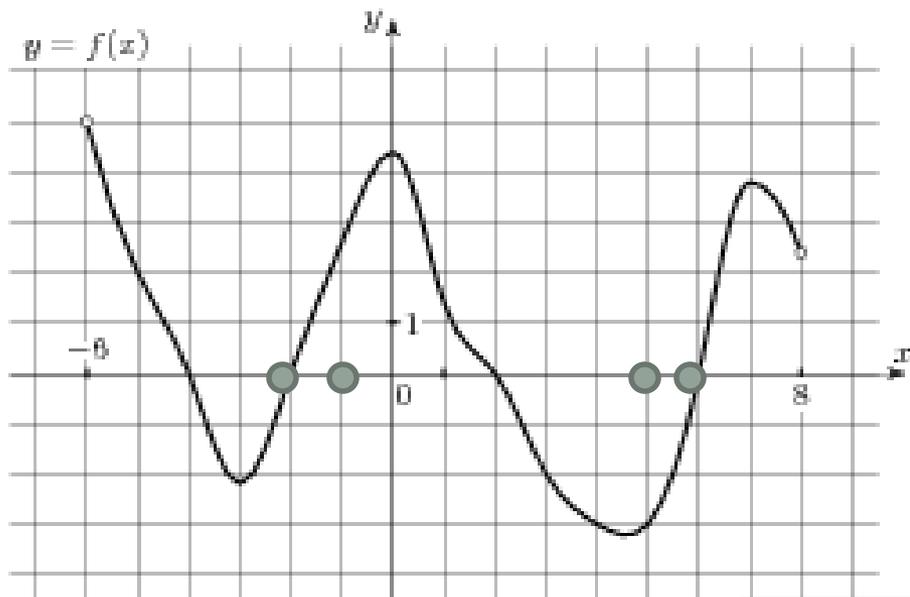
Задание 7 (№ 6019)

Прямая $y=-5x+4$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+3x+6$. Найдите абсциссу точки касания.

ОТВЕТЫ: № 6009: 4,5
№ 6011: -0,5
№ 6013: 4,5
№ 6015: 4
№ 6017: 1,5
№ 6019: -4

Прототип задания 7(№ 27487)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-6;8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



$f(x)$ возрастает на $[-3;0]$ и на $[5;7]$.
Значит, производная функции положительна на этих отрезках, количество целых точек - 4

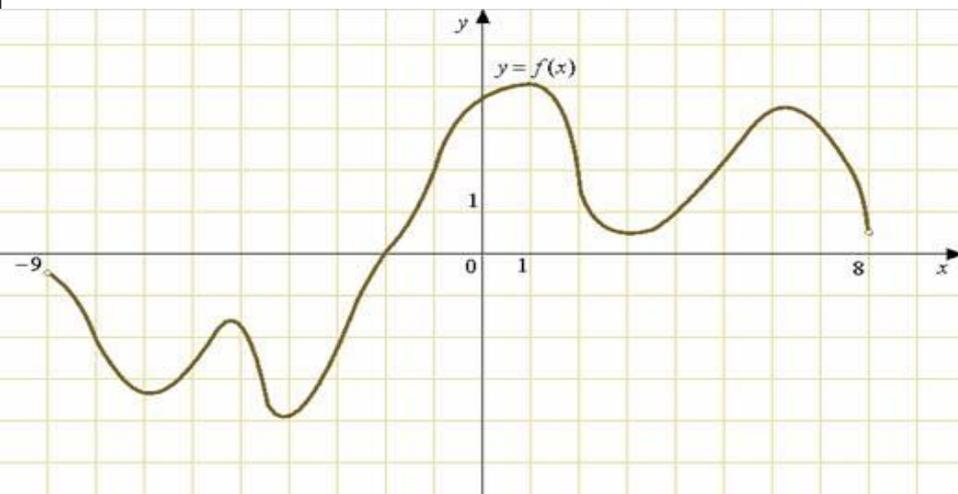
Ответ: 4

Решение

Задания для самостоятельного решения

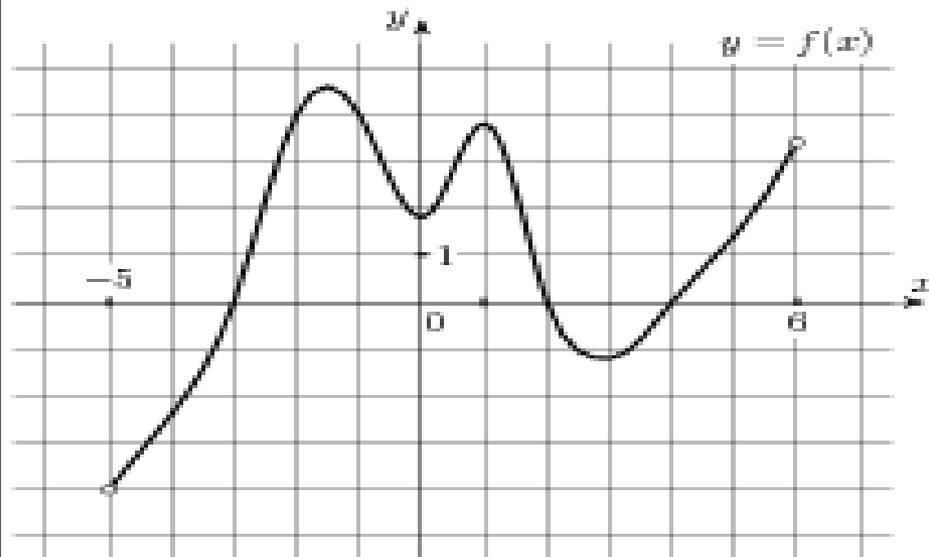
Задание 7 (№ 6399)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Задание 7 (№ 6869)

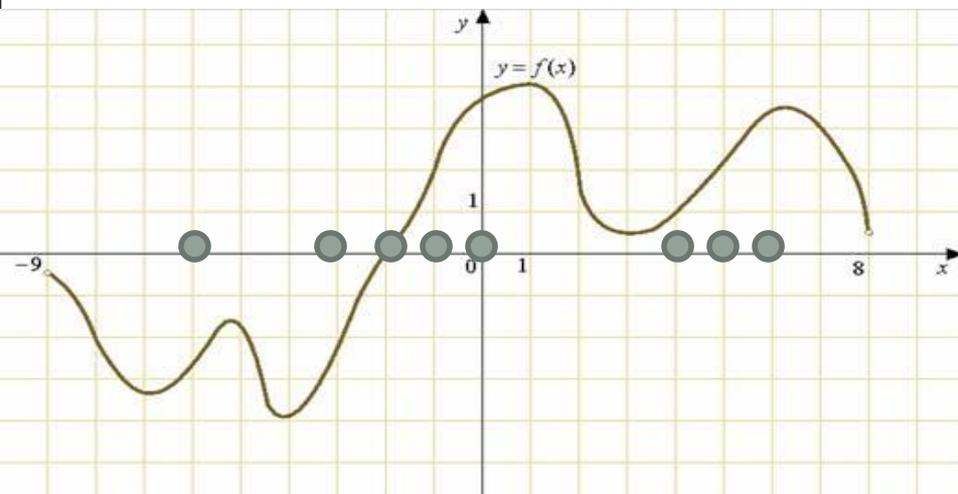
На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;6)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Задания для самостоятельного решения

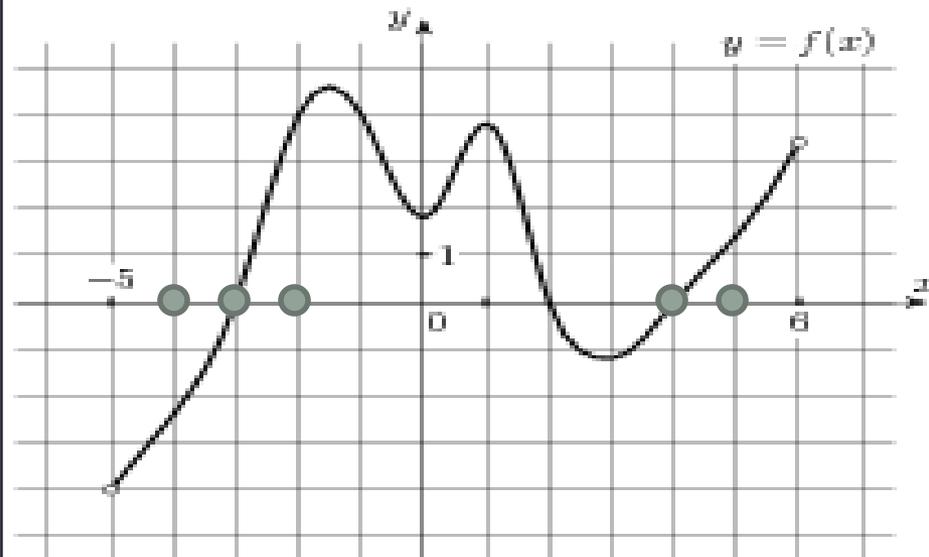
Задание 7 (№ 6399)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Задание 7 (№ 6869)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;6)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

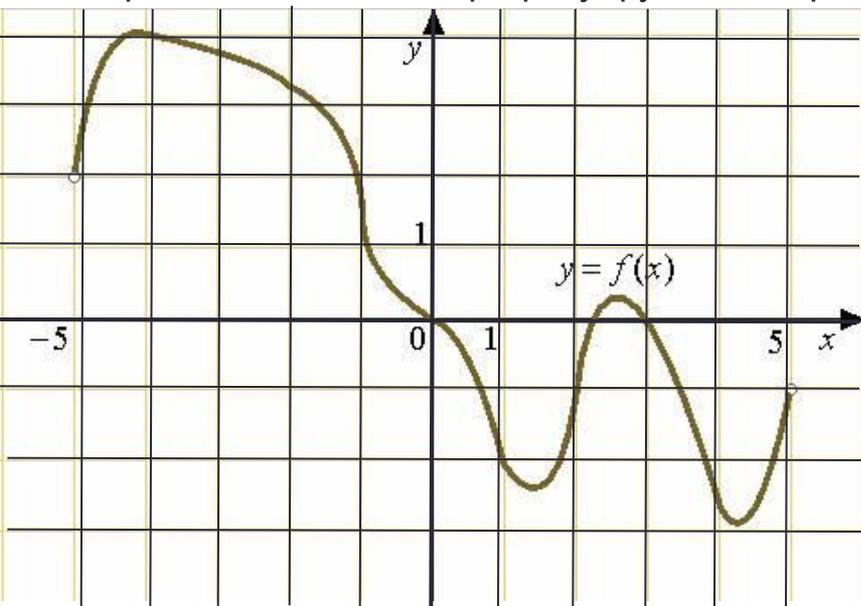


ОТВЕТЫ: № 6399: 7
№ 6869: 5

Проверка

Прототип задания 7 (№ 27489)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=6$ или совпадает с ней.



$$K=0$$

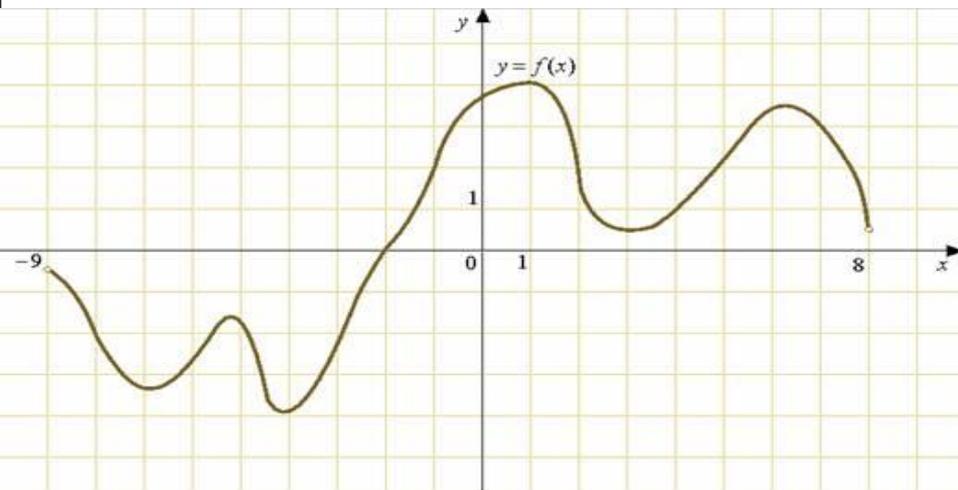
Ответ: 4 точки

Решение

Задания для самостоятельного решения

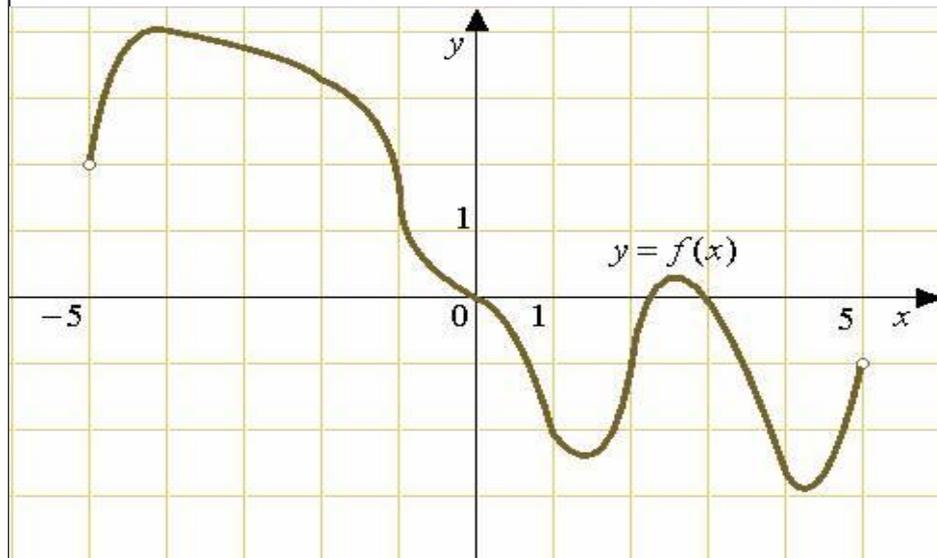
Задание 7 (№ 6401)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=10$



Задание 7 (№ 6421)

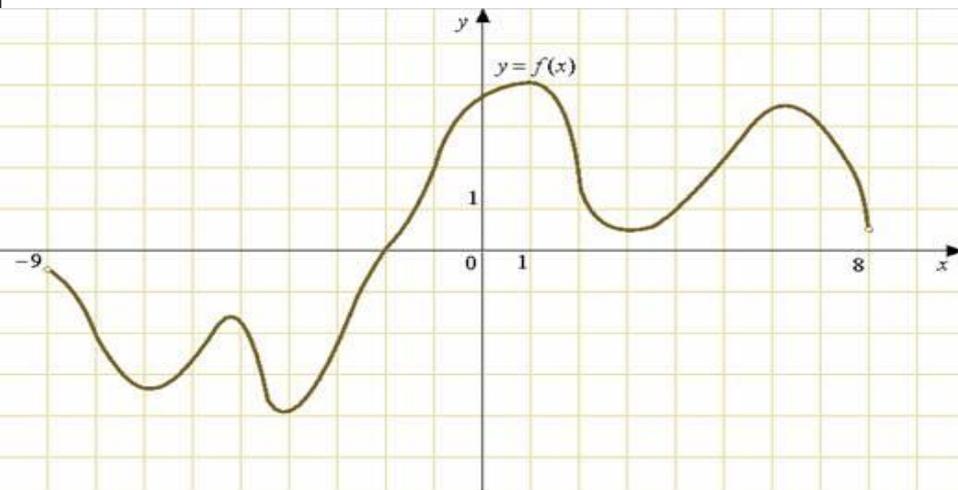
На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=6$



Задания для самостоятельного решения

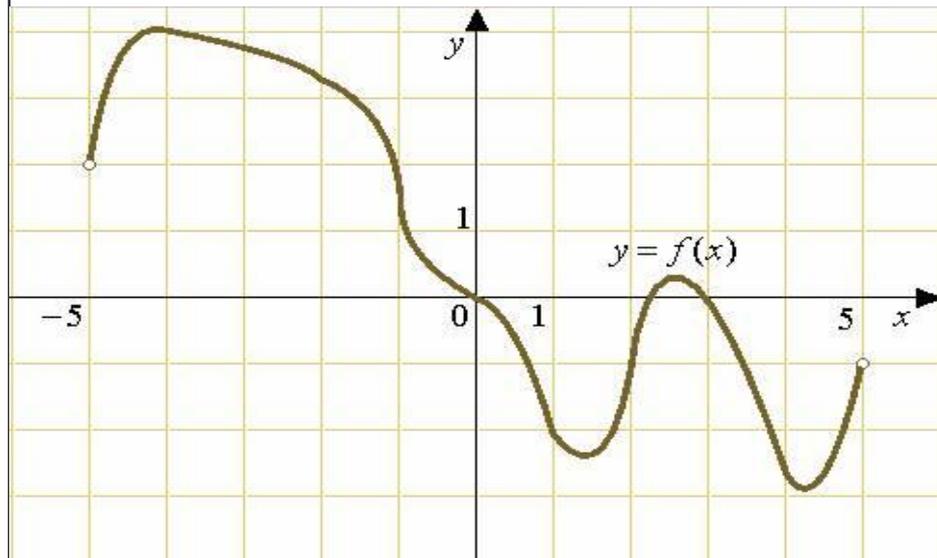
Задание 7 (№ 6401)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=10$



Задание 7 (№ 6421)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=6$

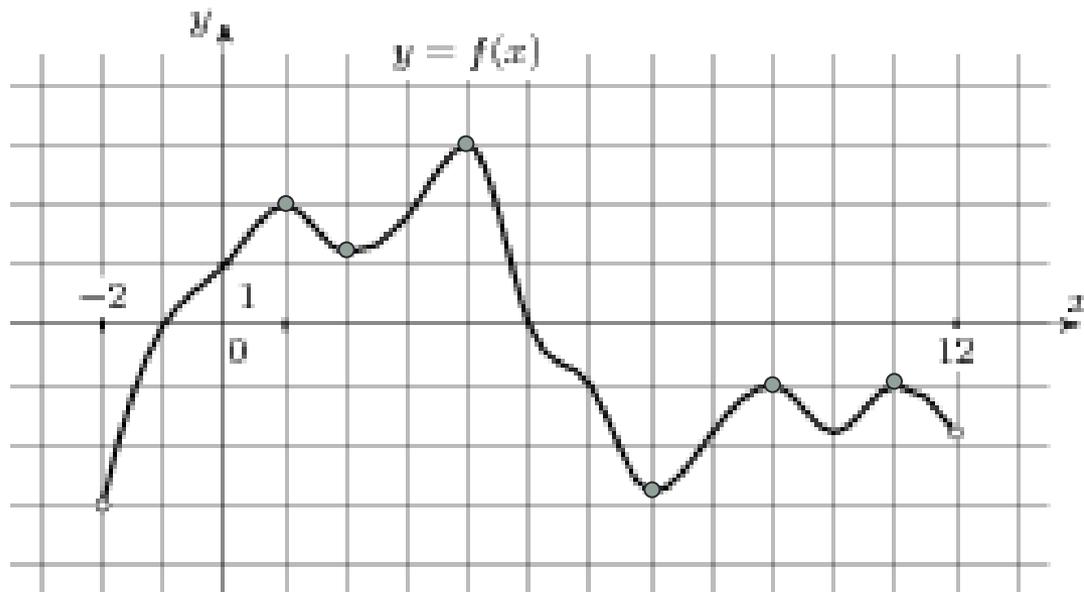


ОТВЕТЫ: № 6401: 6
№ 6421: 4

Проверка

Прототип задания 7 (№ 27490)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-2;12)$.
Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Функция имеет 7 точек экстремума; 1, 2, 4, 7, 9, 10, 11.

Найдём их сумму $1+2+4+7+9+10+11=44$

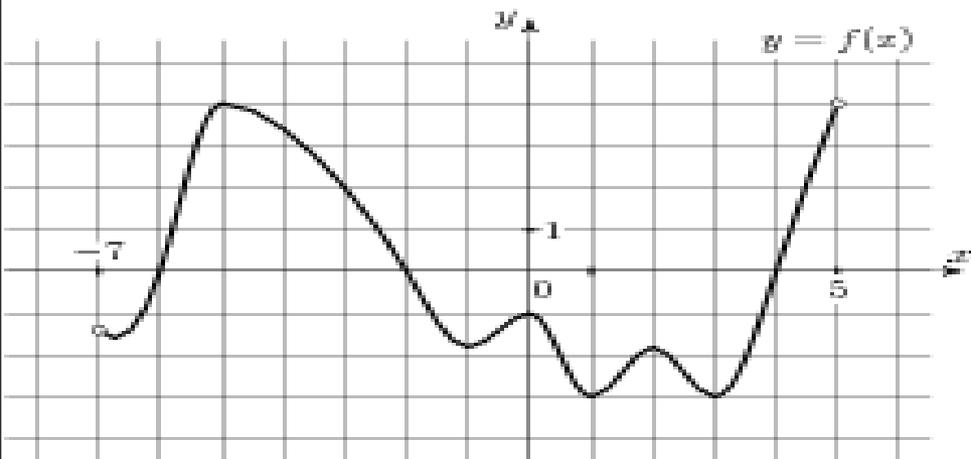
Решение

ОТВЕТ:44

Задания для самостоятельного решения

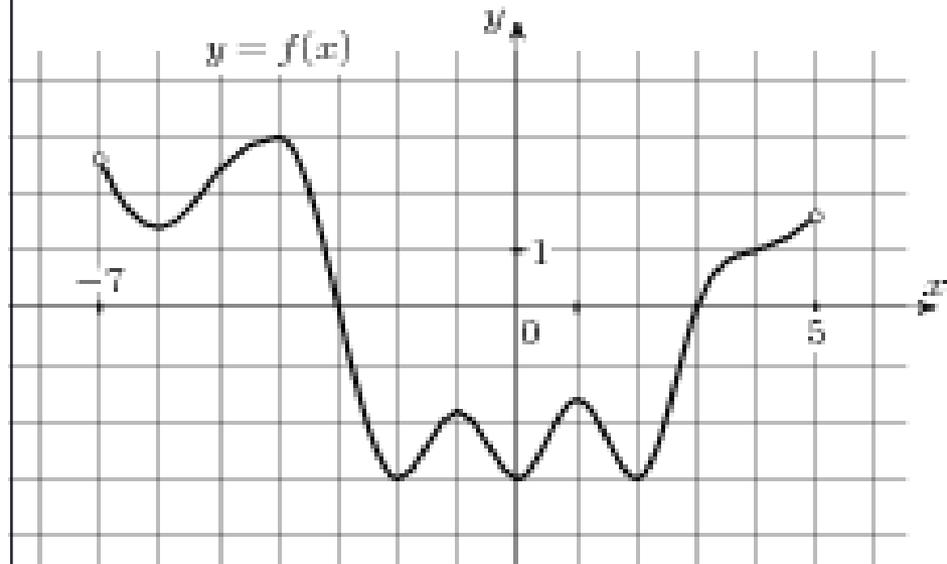
Задание 7 (№ 7329)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-7;5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Задание 7 (№ 7331)

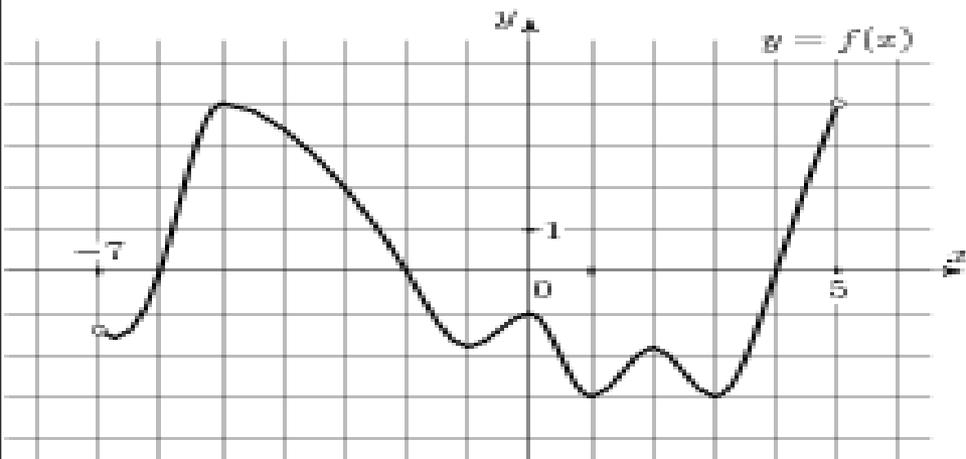
На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-7;5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Задания для самостоятельного решения

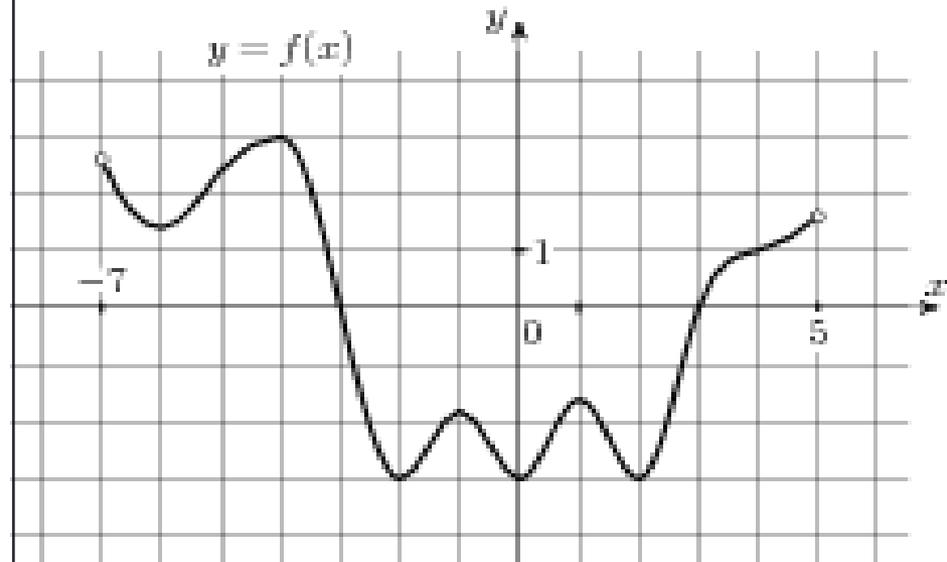
Задание 7 (№ 7329)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-7;5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Задание 7 (№ 7331)

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-7;5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

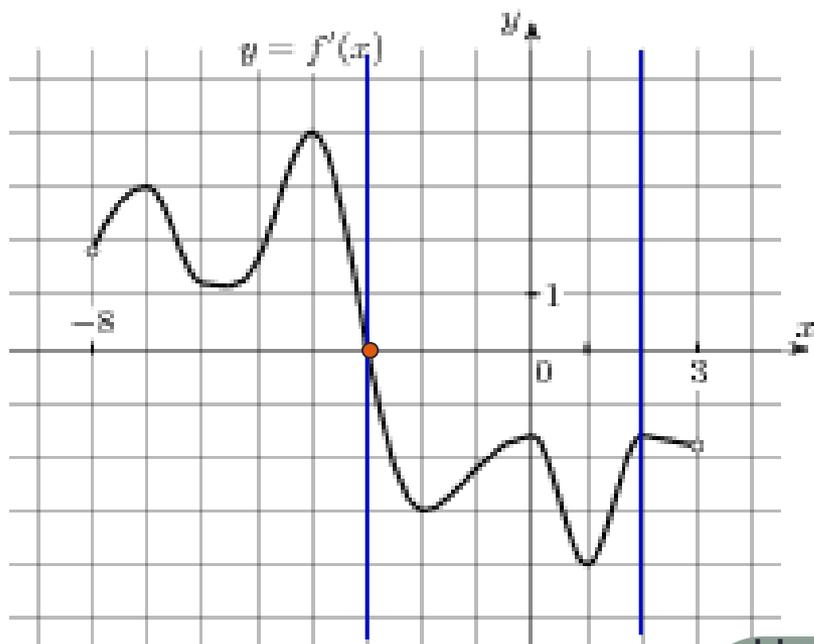


ОТВЕТЫ: № 7329: 0
№ 7331: -4

Проверка

Прототип задания 7 (№27491)

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. В какой точке отрезка $[-3;2]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение.



На отрезке $[-3;2]$ производная функции отрицательна, значит функция убывает. тогда $f(x)$ принимает наибольшее значение тогда, когда x принимает наименьшее значение, то есть при $x = -3$.

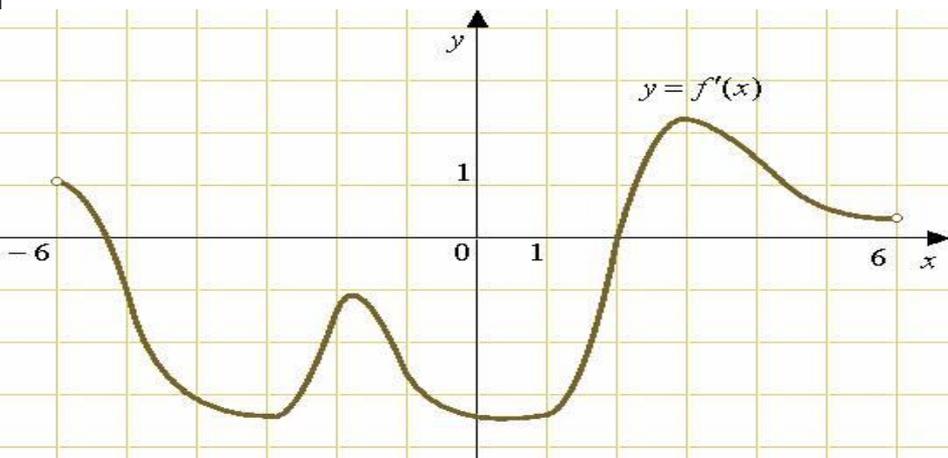
Решение

ОТВЕТ: -3

Задания для самостоятельного решения

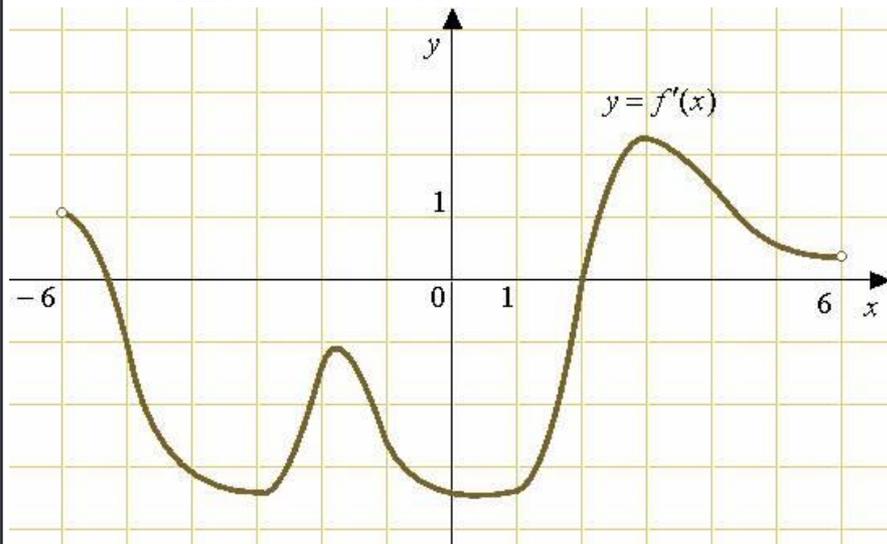
Задание 7 (№ 6413)

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. В какой точке $[-5;-1]$ отрезка $f(x)$ принимает наибольшее значение.



Задание 7 (№ 6415)

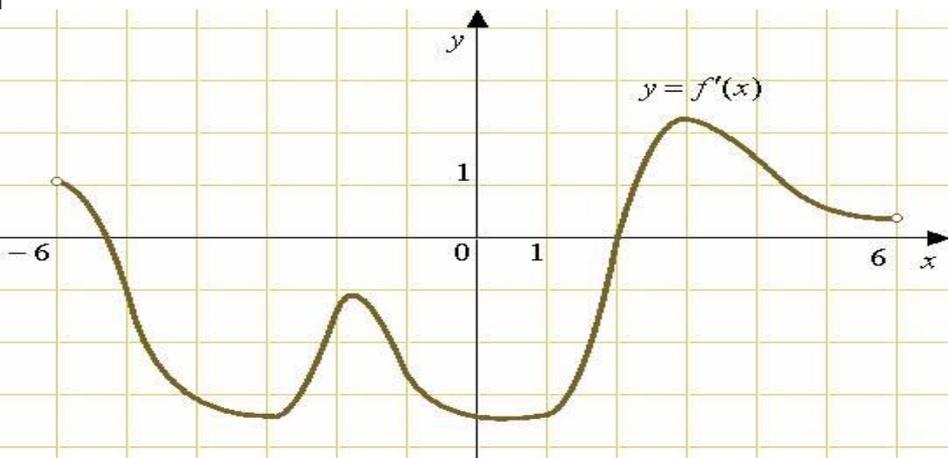
На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. В какой точке отрезка $[3;5]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение.



Задания для самостоятельного решения

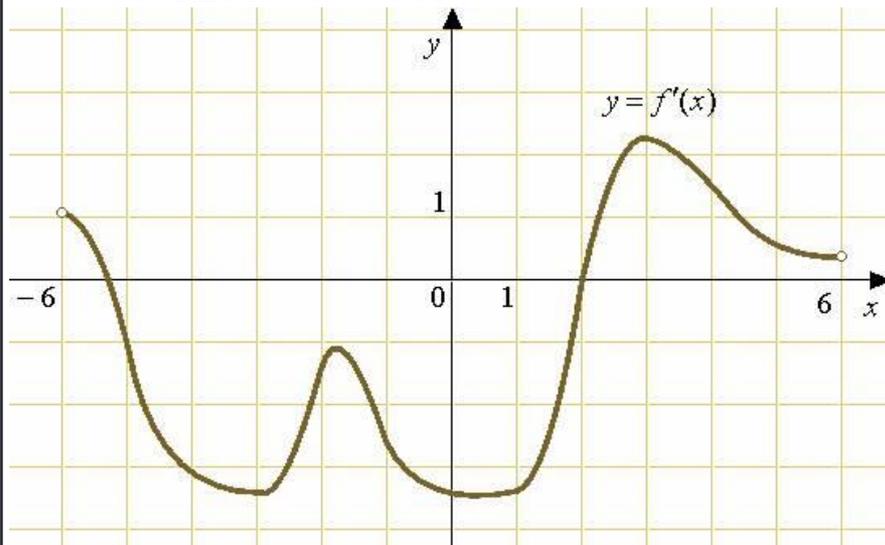
Задание 7 (№ 6413)

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. В какой точке $[-5;-1]$ отрезка $f(x)$ принимает наибольшее значение.



Задание 7 (№ 6415)

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$. В какой точке отрезка $[3;5]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение.

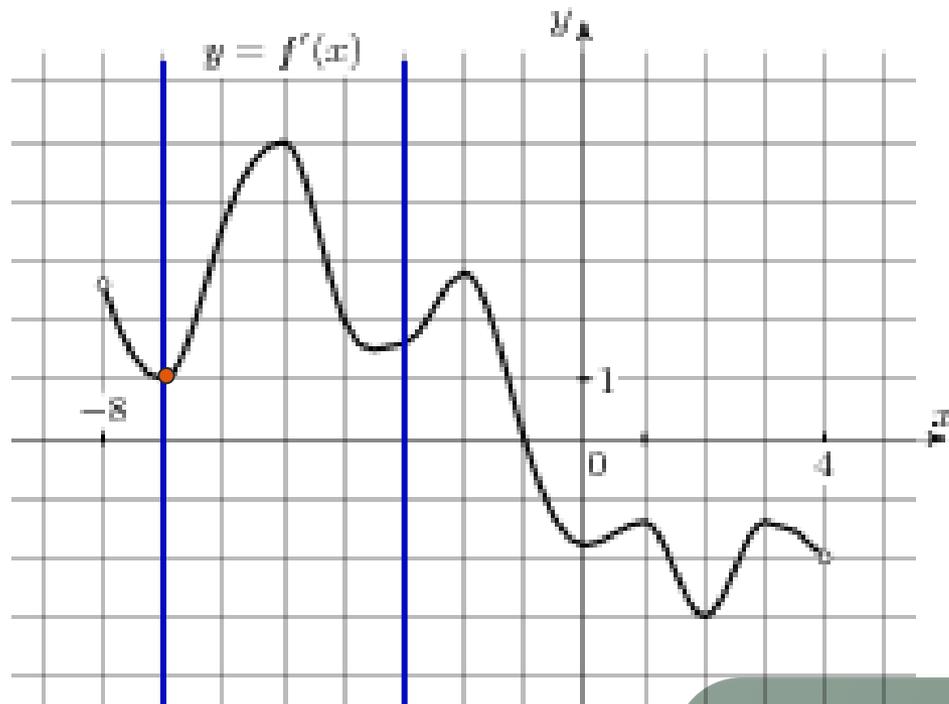


ОТВЕТЫ: №6413 : -5
№6415 : 5

Проверка

Прототип задания 7 (№27492)

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;4)$. В какой точке отрезка $[-7;-3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.



На отрезке $[-7;-3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение при $x = -7$.

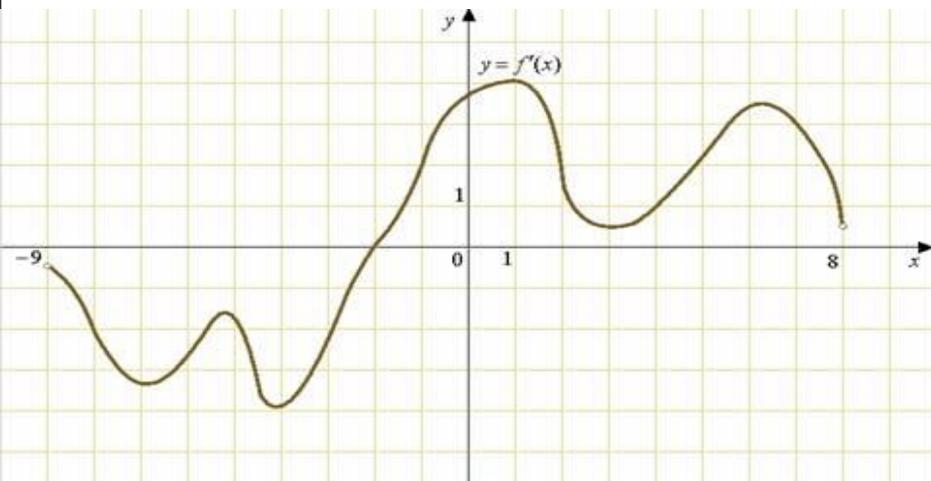
ОТВЕТ: -7

Решение

Задания для самостоятельного решения

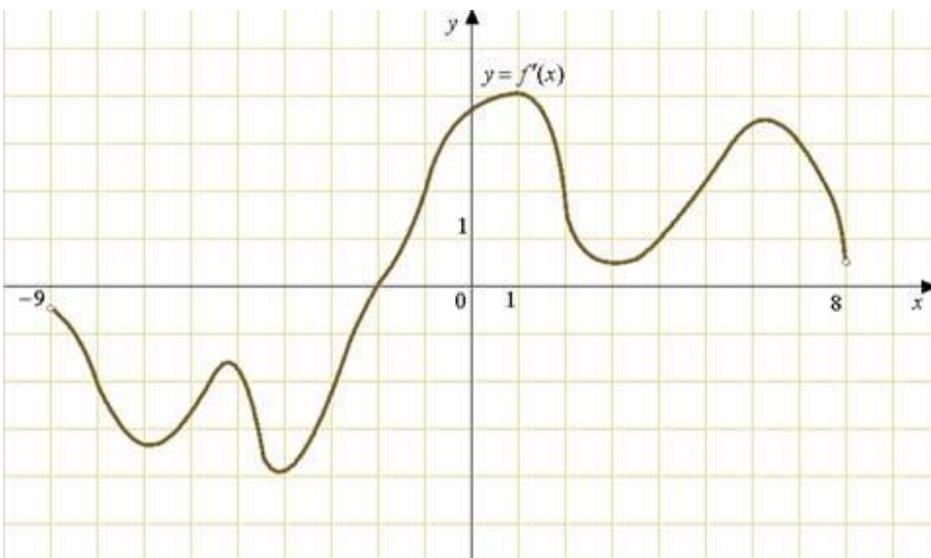
Задание 7 (№ 6403)

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. В какой точке отрезка $[-8;-4]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.



Задание 7 (№ 6405)

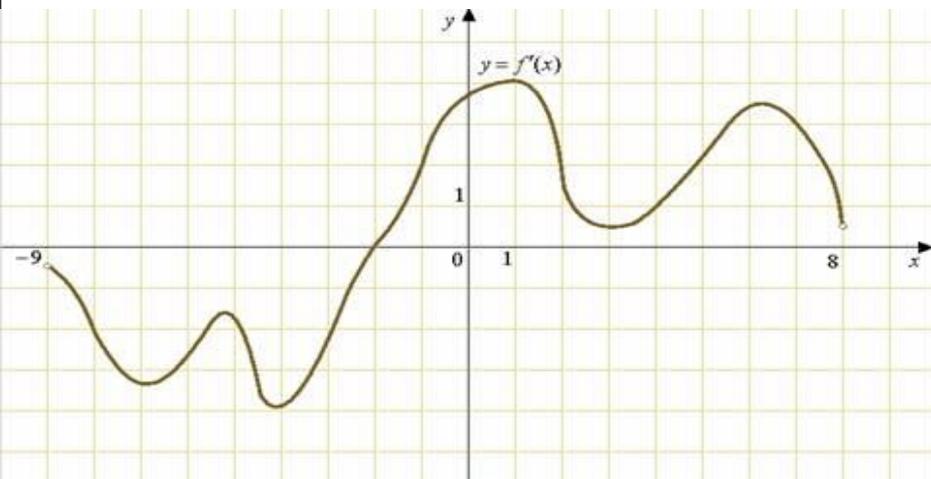
На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. В какой точке отрезка $[1;7]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.



Задания для самостоятельного решения

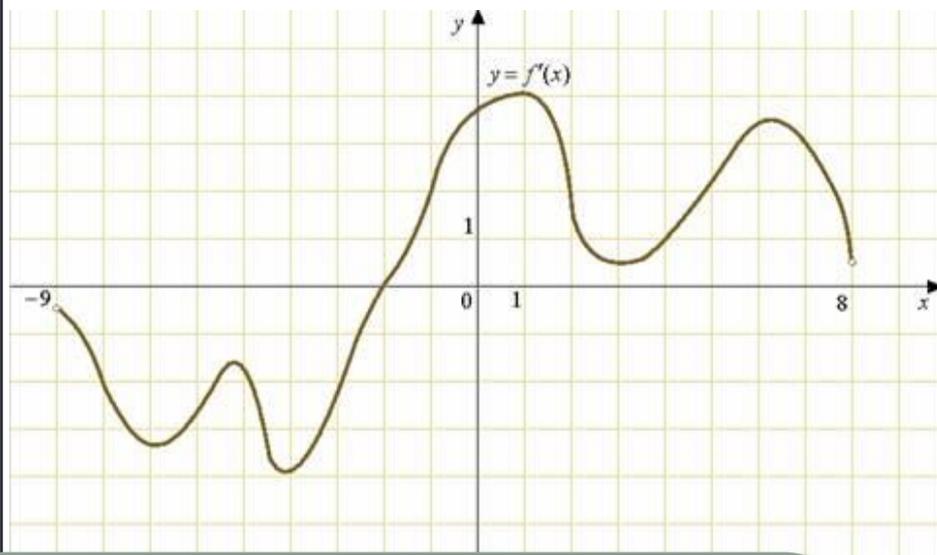
Задание 7 (№ 6403)

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. В какой точке отрезка $[-8;-4]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.



Задание 7(№ 6405)

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;8)$. В какой точке отрезка $[1;7]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.

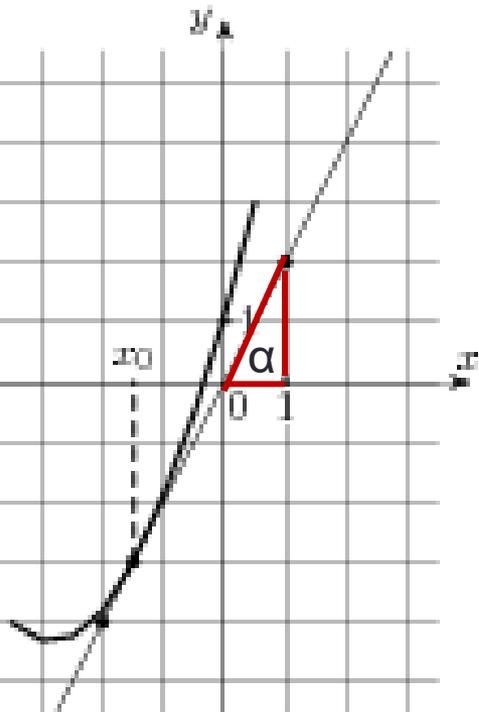


ОТВЕТЫ: №6403 : -4
№6405 : 1

Проверка

Прототип задания 7 (№ 27503)

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$$

Рассмотри прямоугольный треугольник. В

$$\text{нем } \operatorname{tg} \alpha = 2/1 = 2$$

$$f'(x_0) = 2$$

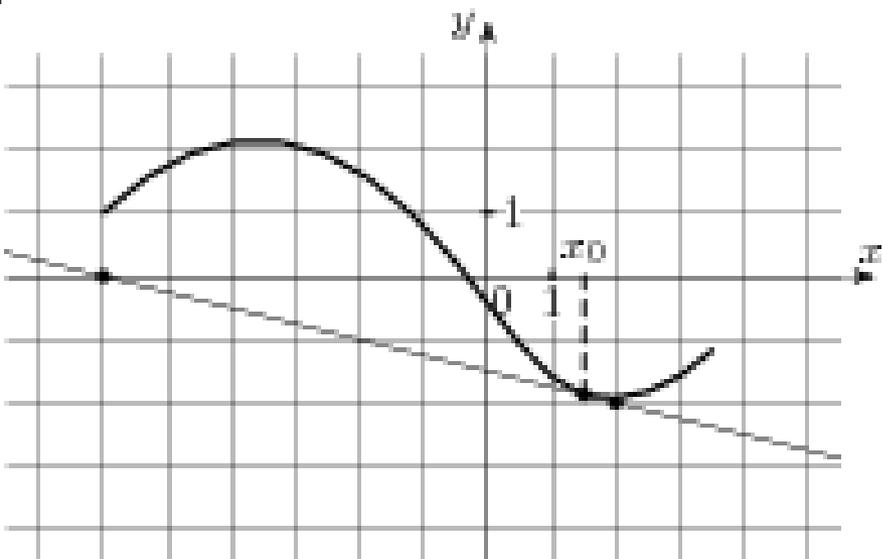
Решение

ОТВЕТ: 2

Задания для самостоятельного решения

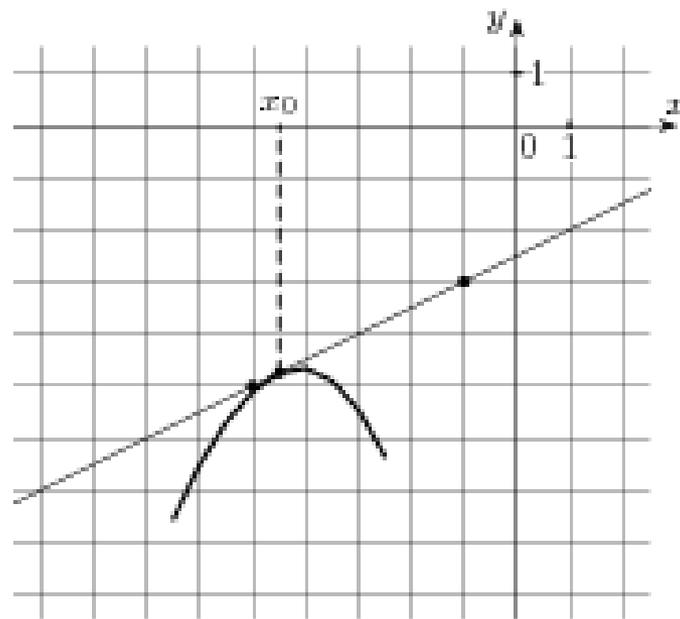
Задание 7 (№ 9051)

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Задание 7 (№ 9055)

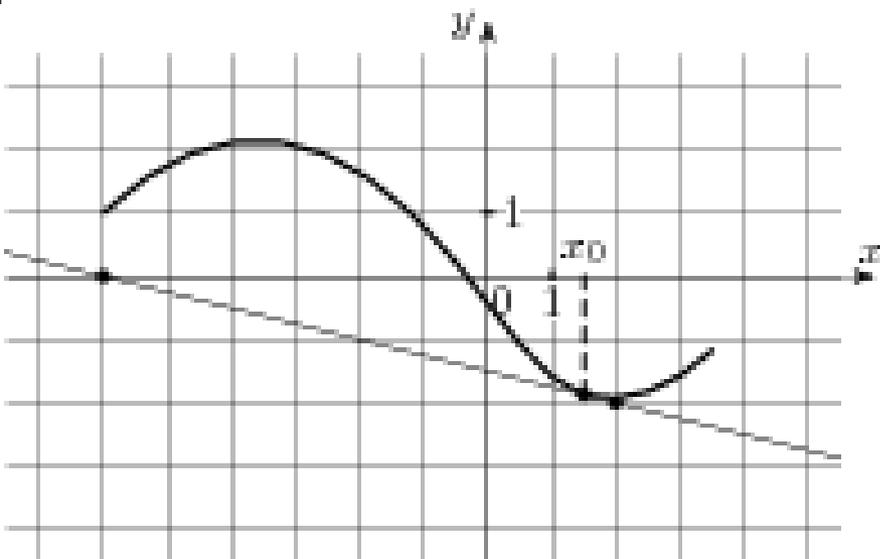
На рисунке изображён график функции и касательная к нему в точке с абсциссой. Найдите значение производной функции в точке.



Задания для самостоятельного решения

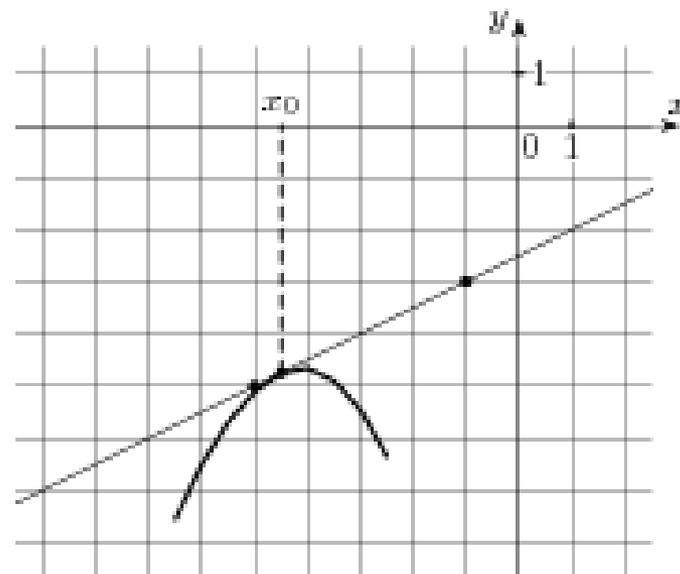
Задание 7 (№ 9051)

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Задание 7 (№ 9055)

На рисунке изображён график функции и касательная к нему в точке с абсциссой. Найдите значение производной функции в точке.

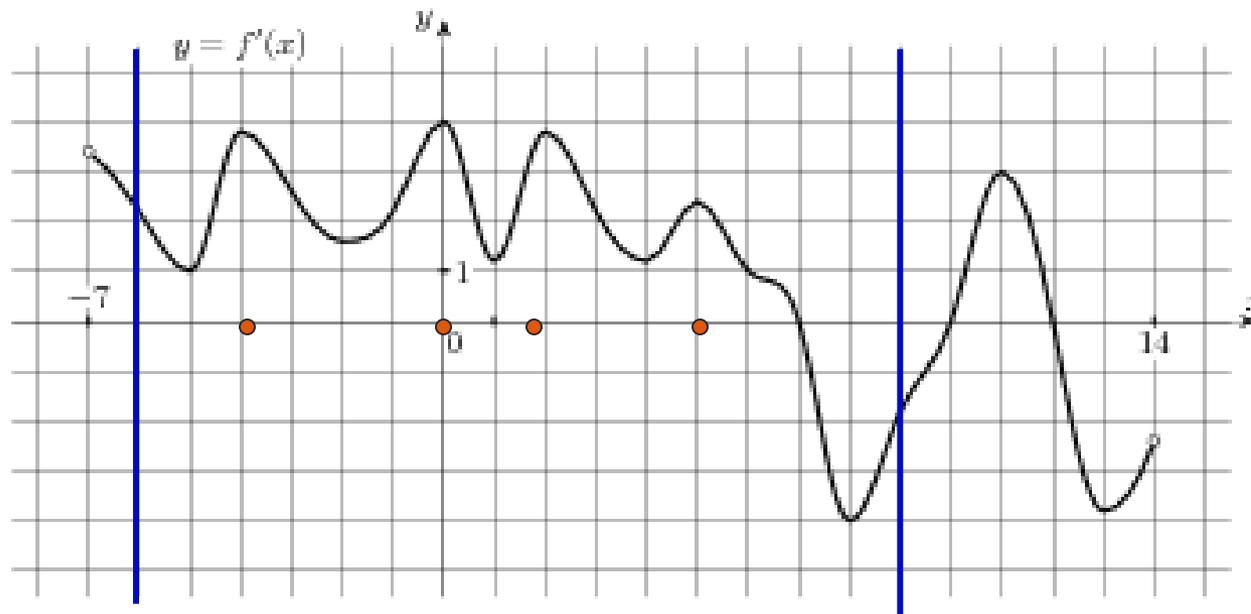


ОТВЕТЫ: №9051: -0,25
№9055: 0,5

Проверка

Прототип задания 7 (№27494)

На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6;9]$



На отрезке $[-6;9]$ функция $f(x)$ 4 раз меняет характер монотонности, с возрастания на убывание, а значит, имеет 4 точек максимума.

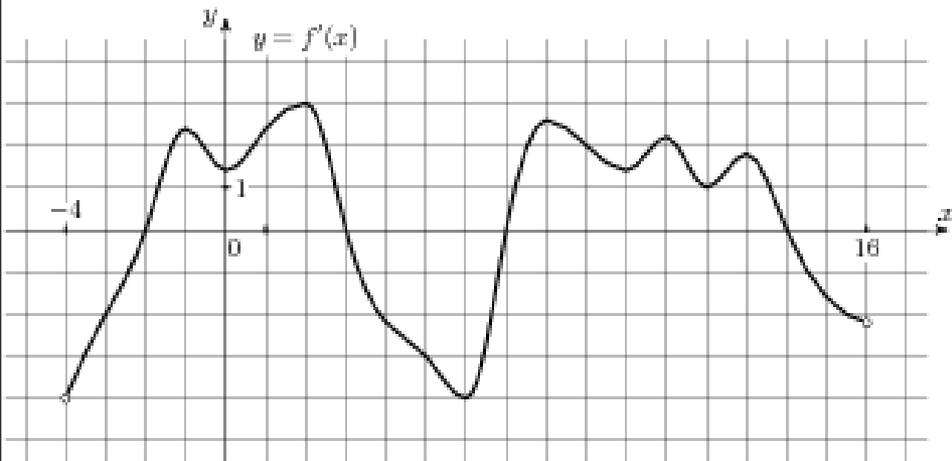
ОТВЕТ:4

Решение

Задания для самостоятельного решения

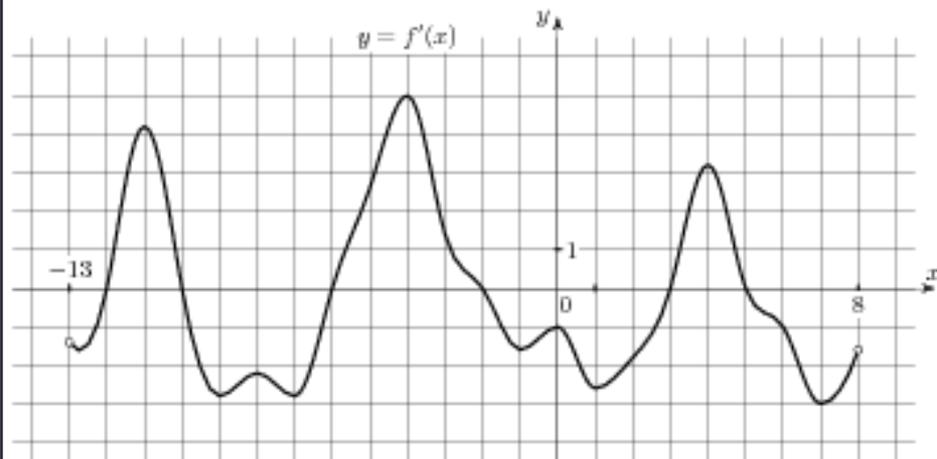
Задание 7 (№ 7807)

На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 16)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 13]$.



Задание 7 (№ 7817)

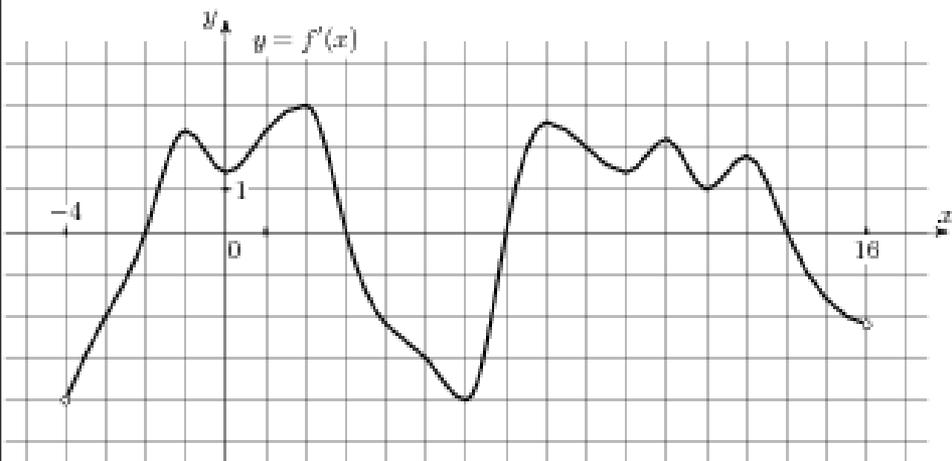
На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-13; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-8; 6]$.



Задания для самостоятельного решения

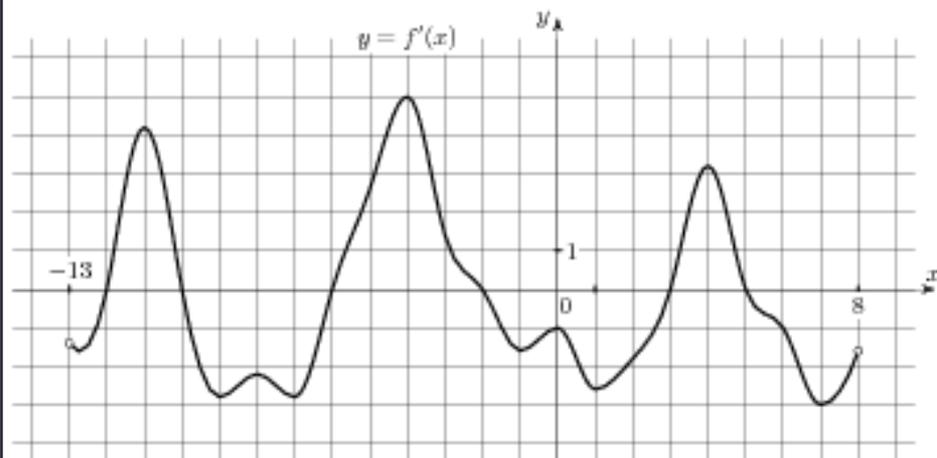
Задание 7

На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4;16)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[0;13]$.



Задание 7

На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-13;8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-8;6]$.



ОТВЕТЫ: №6413 : 4
№6415 : 4

Проверка