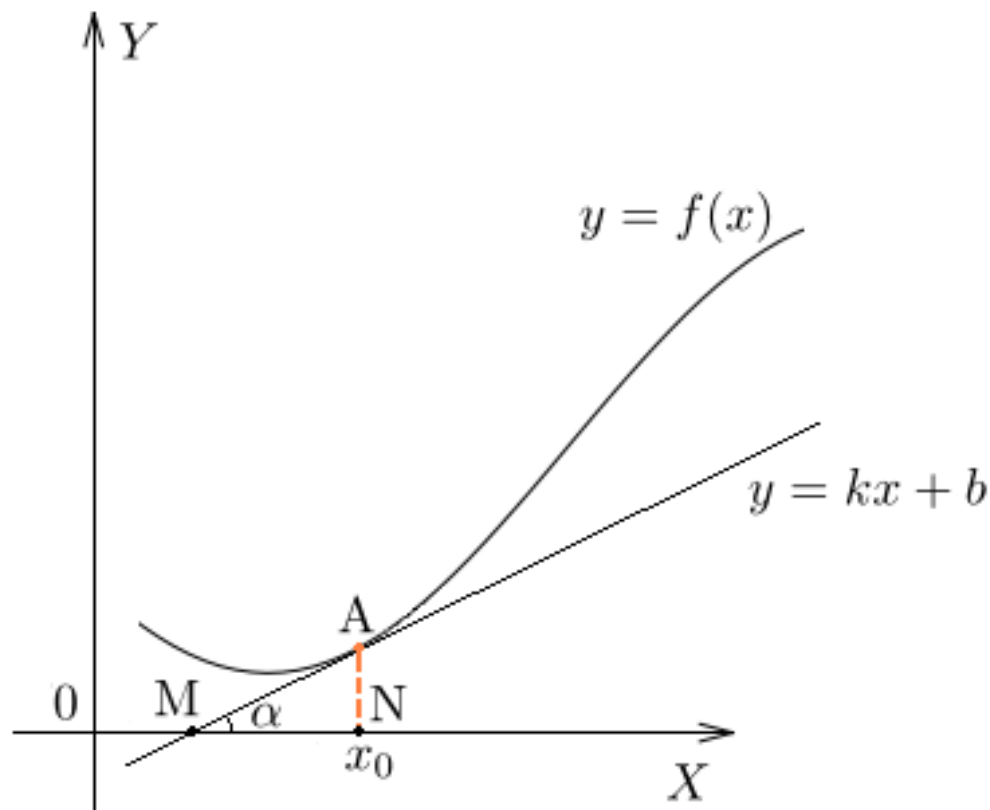


ПРОИЗВОДНАЯ. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Анопова Елена Ивановна,
учитель математики МАОУ СОШ №28 г. Томска

Геометрический смысл производной



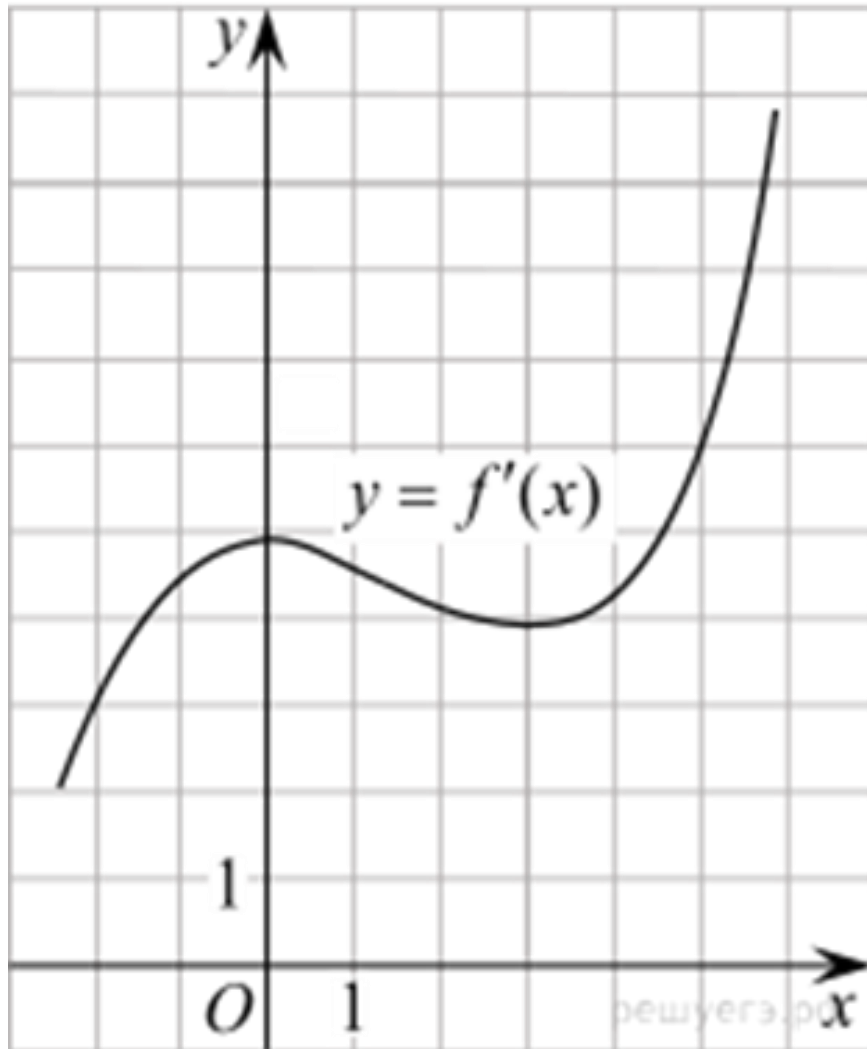
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{AN}{MN}$$

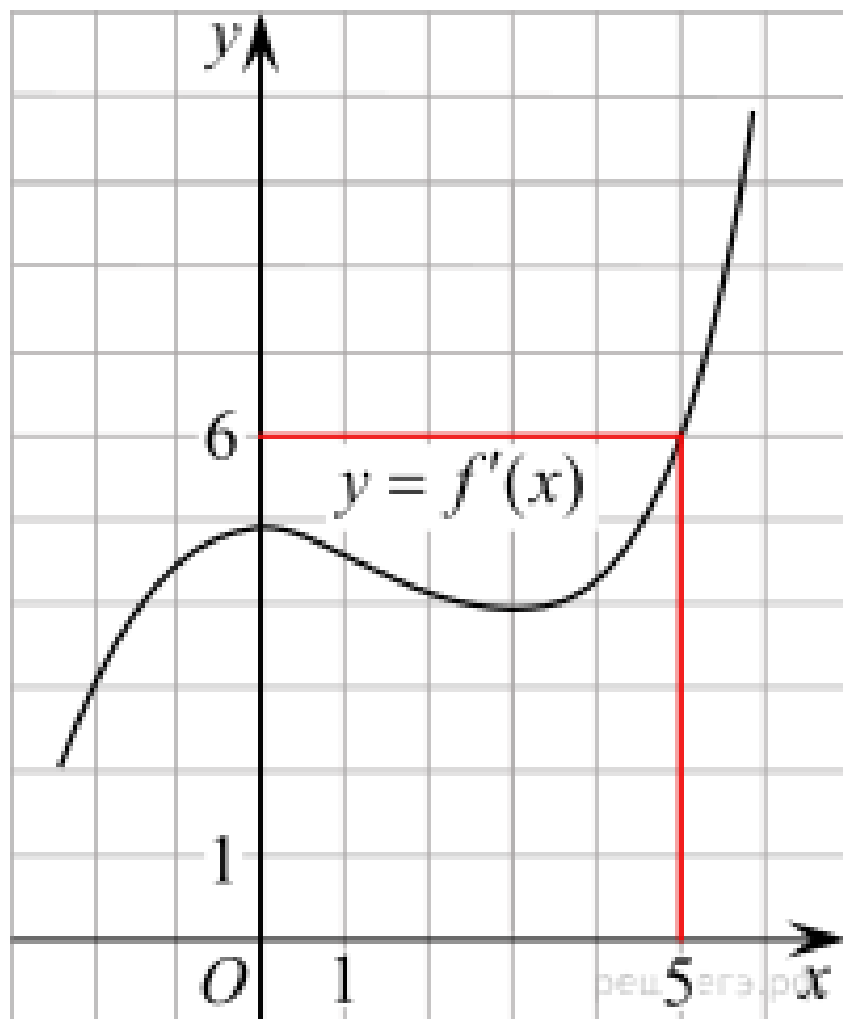
$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

Прототип задания 7. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней.



Прототип задания 7. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней.

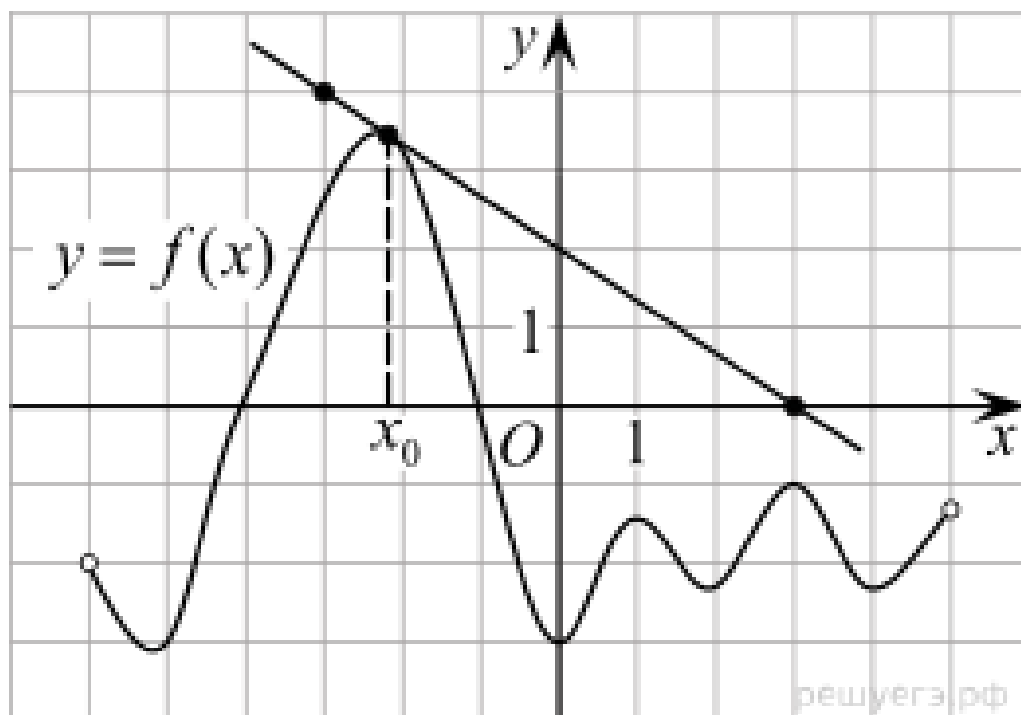


Решение.

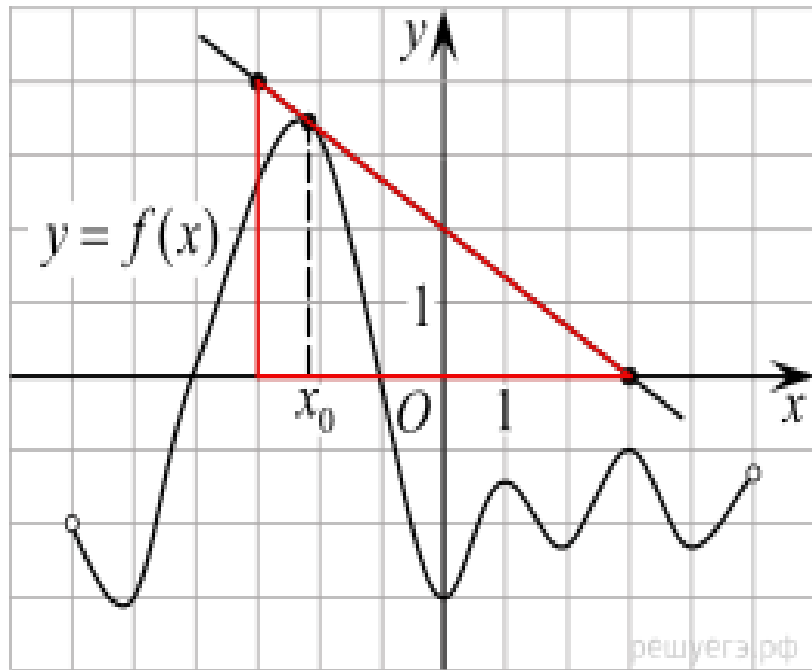
Касательная параллельна прямой $y = 6x$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный $y' = 6$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Осталось найти, в какой точке x производная принимает значение 6: искомая точка $x = 5$.

Ответ: 5

Прототип задания 7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Найдите значение производной функции $g(x) = 6f(x) - 3x$ в точке x_0 .



Прототип задания 7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Найдите значение производной функции $g(x) = 6f(x) - 3x$ в точке x_0 .



Решение:

Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = 6 \cdot f'(x) - 3.$$

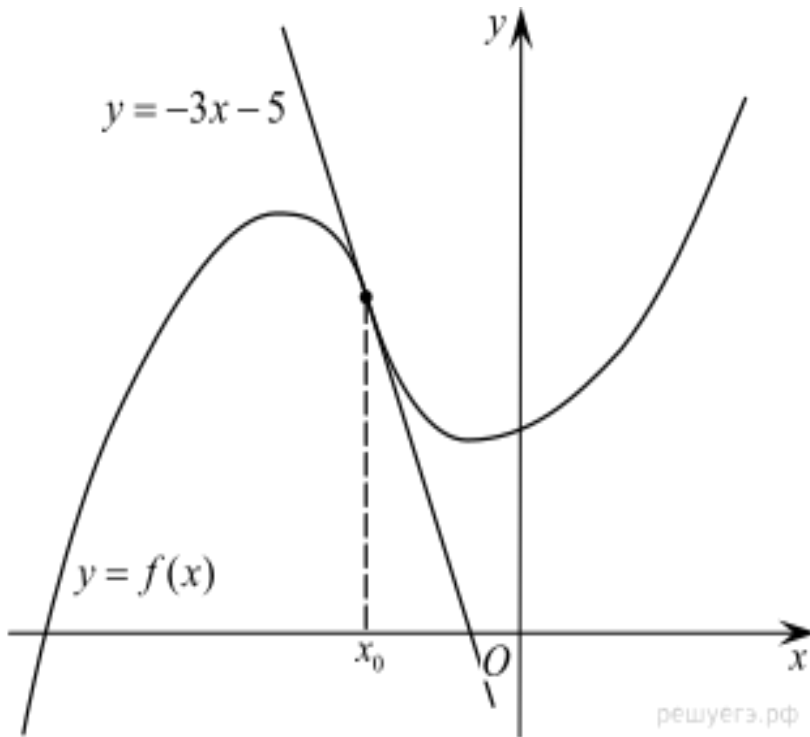
По рисунку найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Поэтому $f'(x_0) = -\frac{2}{3}$.

Тогда для искомого значения получаем

$$g'(x_0) = 6 \cdot f'(x_0) - 3 = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 3 = -7.$$

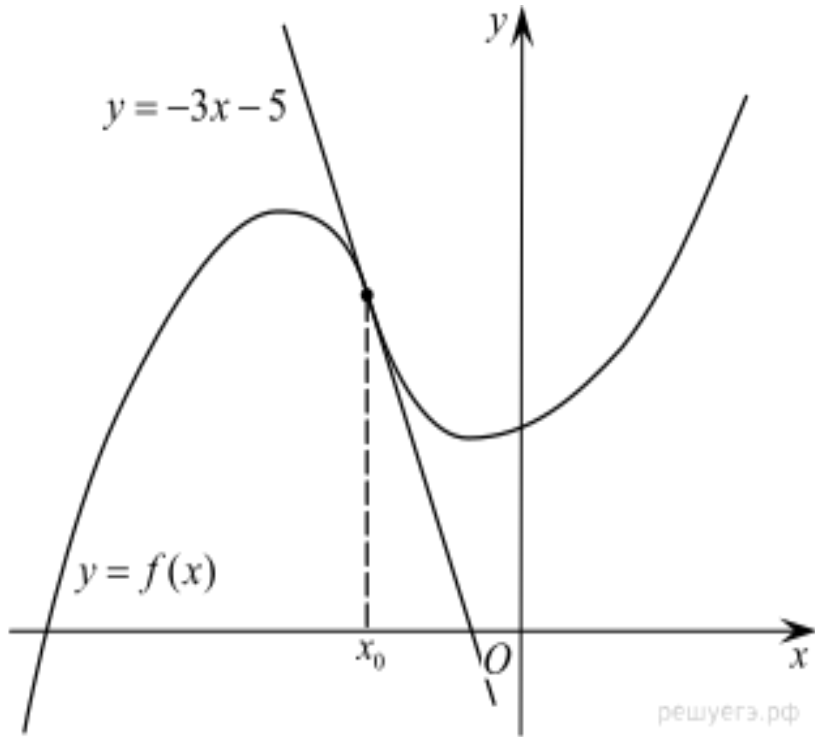
Ответ: -7.

Прототип задания 7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = -7f(x) + 21x + \frac{1}{441}$ в точке x_0 .



Прототип задания 7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции

$$g(x) = -7f(x) + 21x + \frac{1}{441} \quad \text{в точке } x_0.$$



Решение.

Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = -7 \cdot f'(x) + 21.$$

Найдём значение $f'(x_0)$.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

$$f'(x_0) = k = -3.$$

Тогда искомое значение

$$g'(x_0) = -7 \cdot f'(x_0) + 21 = -7 \cdot (-3) + 21 = 42.$$

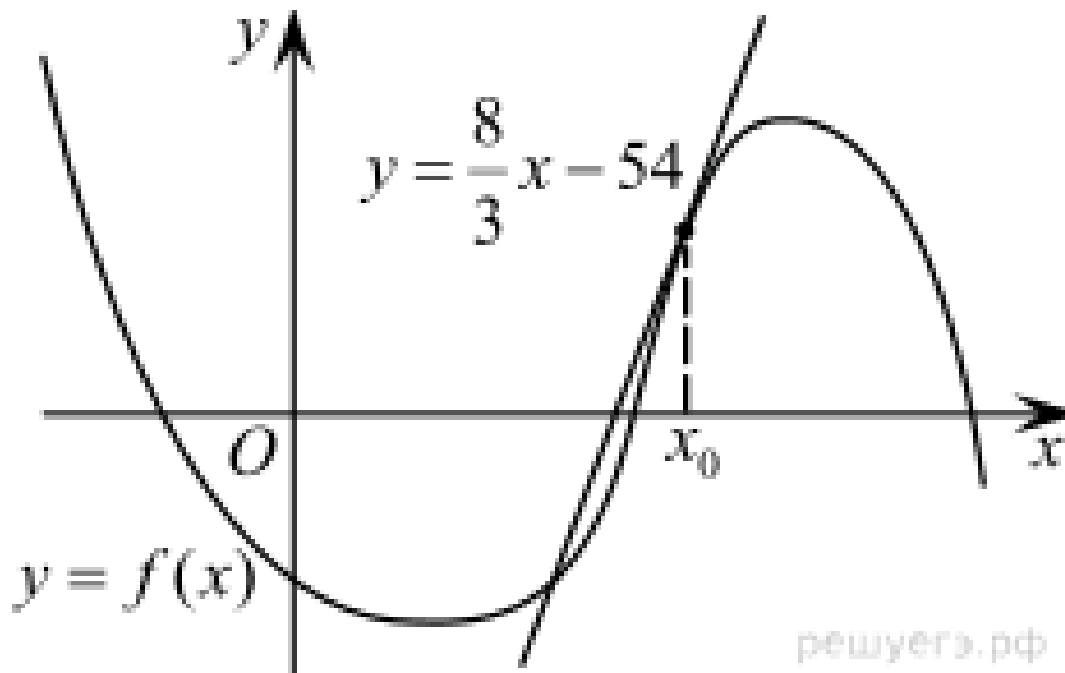
Ответ: 42.

Сделай сам!

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции

$$g(x) = (f'(x) - 0,5) \cdot 6$$

в точке x_0 .

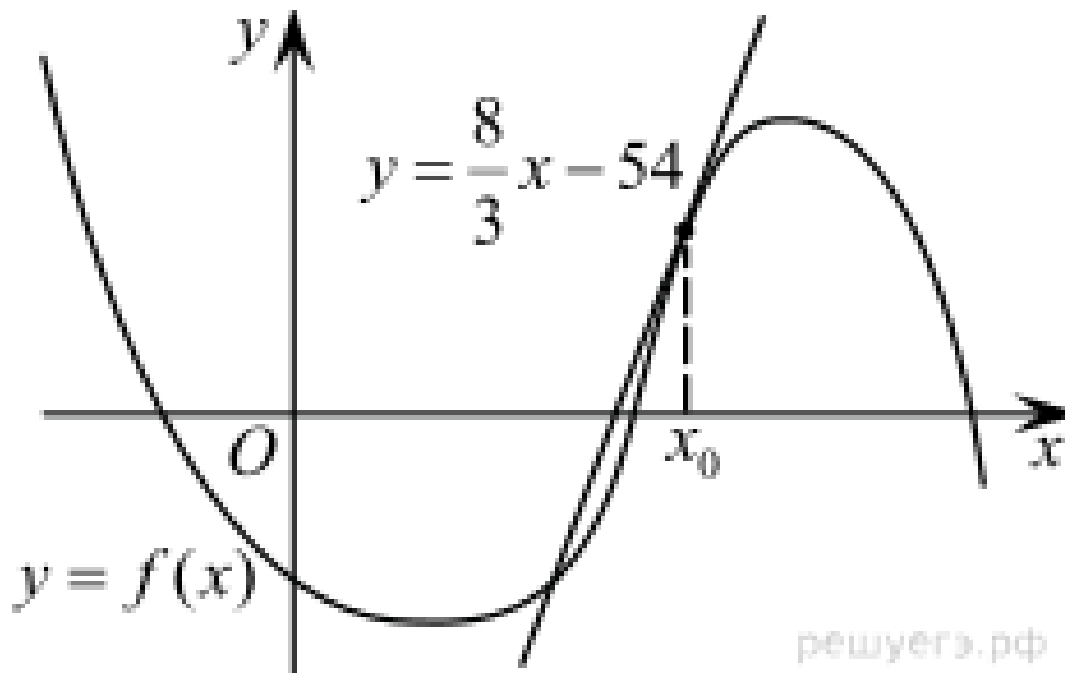


Сделай сам!

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение функции

$$g(x) = (f'(x) - 0,5) \cdot 6$$

в точке x_0 .

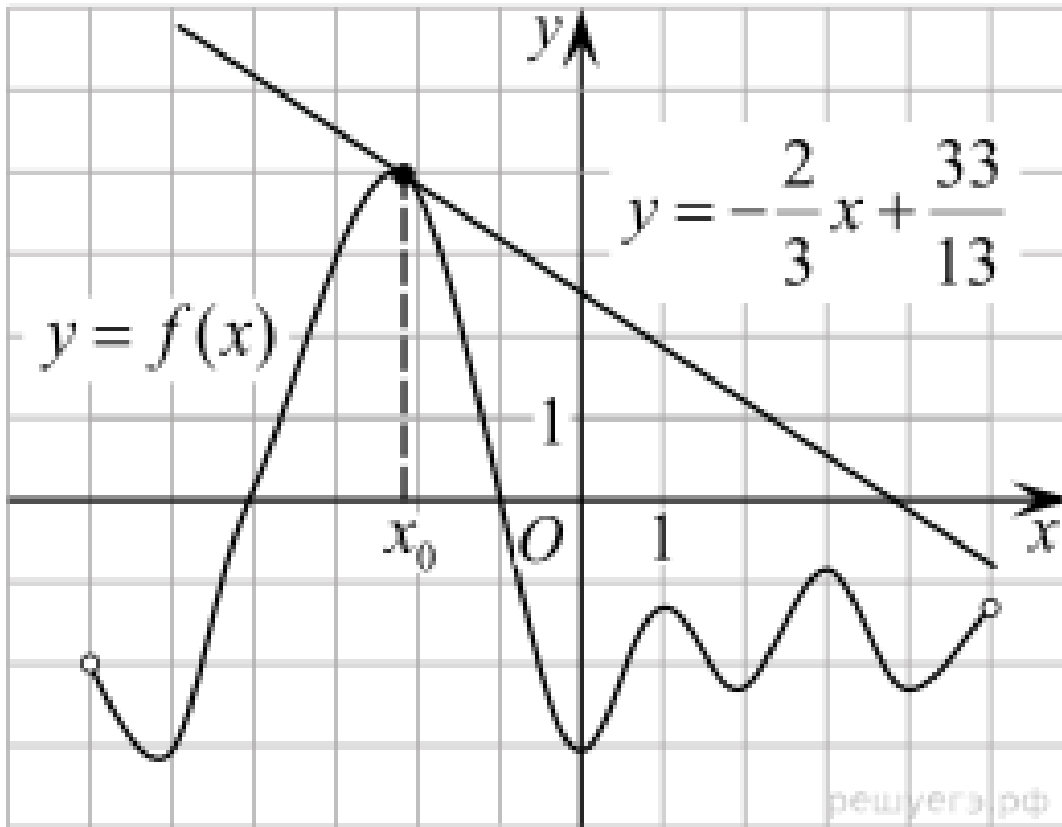


Ответ: 13

Сделай сам!

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = 12f(x) + \frac{6}{13}$ в точке x_0 .

$$g(x) = 12f(x) + \frac{6}{13}$$



Ответ: -8

- Прямая $y = f(x)$ является касательной к графику функции $y = g(x)$. Найдите абсциссу точки касания.
- Прямая $y = f(x)$ является касательной к графику функции $g(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите коэффициент a (или b , или c).

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Прототип задания 7. Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции и прямой задаётся системой

требований:
$$\begin{cases} -4 = 3x^2 + 14x + 7 \\ -4x - 11 = x^3 + 7x^2 + 7x - 6 \end{cases} (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x + 11 = 0, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\frac{11}{3}, \\ x = -1, \end{array} \right. \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 (*) \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания -1 .

Ответ: -1 .

Прототип задания 7. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a .

Решение.

Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 2x + 3$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = y'(x_0)$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2 = 3, \\ ax_0^2 + 2x_0 + 3 = 3x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = 0,5, \\ 0,5x_0 - x_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,125, \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

Искомое значение a равно 0,125.

Ответ: 0,125.

Прототип задания 7. Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $f(x) = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение.

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 56x + b = -5, \\ 28x^2 + bx + 15 = -5x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ 28x^2 + (-5 - 56x)x + 15 = -5x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ x^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому $x = 0,5$, откуда $b = -33$.

Ответ: -33.

Прототип задания 7. Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c .

Решение.

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 6x - 3 = 3, \\ 3x^2 - 3x + c = 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 3x^2 - 6x + c - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ c = 7. \end{cases}$$

Ответ: 7.

Сделай сам!

- Прямая $y = 6x - 2$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 7$. Найдите a .
- Прямая $y = -8x + 5$ является касательной к графику функции $f(x) = 18x^2 + bx + 7$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.
- Прямая $y = -6x - 5$ является касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 10x + c$. Найдите c .

Сделай сам!

- Прямая $y = 6x - 2$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 7$. Найдите a .

Ответ: 3.

- Прямая $y = -8x + 5$ является касательной к графику функции $f(x) = 18x^2 + bx + 7$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания меньше 0.

Ответ: 4.

- Прямая $y = -6x - 5$ является касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 10x + c$. Найдите c .

Ответ: -1.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

* производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 -
это *скорость изменения функции $f(x)$*
в точке x_0 , т.е.

$$x'(t) = v(t)$$

Прототип задания 7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости: $v(t) = x'(t) = 12t - 48$

При $t = 9$ с имеем:

$$v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60 \text{ м/с.}$$

Ответ: 60.

Прототип задания 7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 13t + 23$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

Решение.

Найдем закон изменения скорости:

$$v(t) = x'(t) = 2t - 13$$

Чтобы найти, в какой момент времени скорость была равна 3 м/с, решим уравнение:

$$2t - 13 = 3 \Leftrightarrow 2t = 16 \Leftrightarrow t = 8 \text{ с.}$$

Ответ: 8.

Сделай сам!

- Материальная точка движется прямолинейно по закону

$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

- Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

Сделай сам!

- Материальная точка движется прямолинейно по закону

$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Ответ: 7.

- Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$$

(где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 3$ с.

Ответ: 59.

Спасибо за внимание!