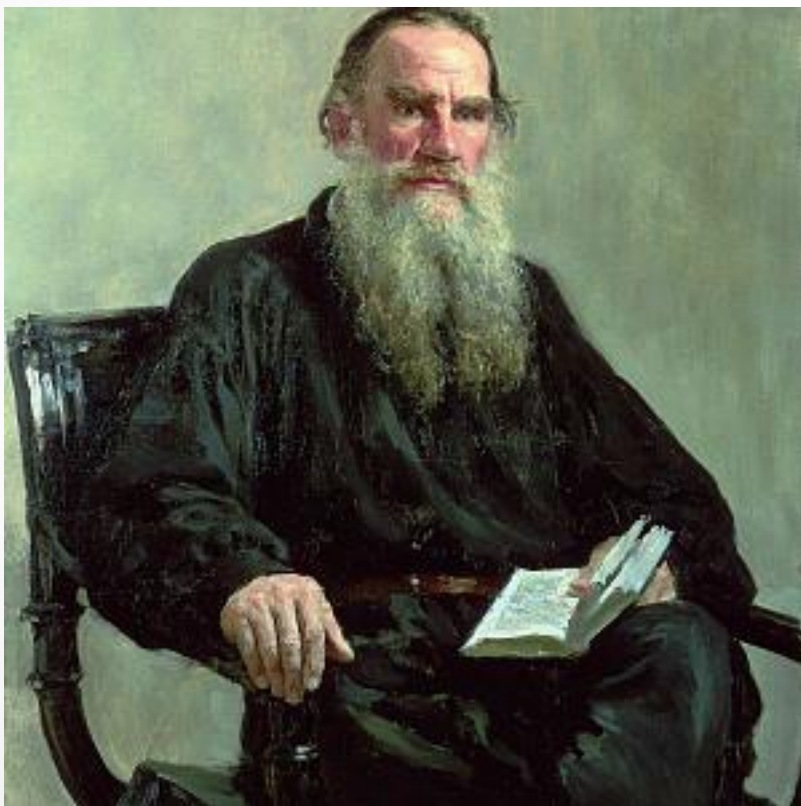


Алгебраические выражения, уравнения и
неравенства в курсе математики основной
школы: виды, способы решения, критерии
оценивания заданий с развернутым
ответом.

Полева Н.В., учитель математики
МАОУ СОШ № 44

Большинство жизненных задач
решаются как алгебраические
уравнения: приведением их к самому
простому виду.

Л. Толстой



Алгебраические выражения.

1. Буквенные выражения (выражения с переменными).

- Буквенные выражения. Числовое значение буквенного выражения.
- Допустимые значения переменных, входящих в алгебраические выражения.
- Подстановка выражений вместо переменных.
- Равенство буквенных выражений, тождество. Преобразования выражений.

2. Свойства степени с целым показателем

3. Многочлены.

- Многочлен. Сложение, вычитание, умножение многочленов.
- Формулы сокращённого умножения: квадрат суммы и квадрат разности; формула разности квадратов.
- Разложение многочлена на множители.
- Квадратный трёхчлен. Теорема Виета.
- Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители.
- Степень и корень многочлена с одной переменной.

4. Алгебраическая дробь.

- Алгебраическая дробь. Сокращение дробей.
- Действия с алгебраическими дробями.
- Рациональные выражения и их преобразования.
- Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях.

Уравнения и неравенства.

1. Уравнения.

- Уравнение с одной переменной, корень уравнения.
- Линейное уравнение.
- Квадратное уравнение, формула корней квадратного уравнения.
- Решение рациональных уравнений.
- Примеры решения уравнений высших степеней. Решение уравнений методом замены переменной. Решение уравнений методом разложения на множители.

- Уравнение с двумя переменными, решение уравнения с двумя переменными.
- Система уравнений, решение системы.
- Система двух линейных уравнений с двумя переменными, решение подстановкой и алгебраическим сложением.
- Уравнение с несколькими переменными.
- Решение простейших нелинейных систем.

2. Неравенства.

- Числовые неравенства и их свойства.
- Неравенство с одной переменной. Решение неравенства.
- Линейные неравенства с одной переменной.
- Системы линейных неравенств.
- Квадратные неравенства.

ОГЭ математика

I часть

Задание 7. Числовые неравенства. Координатная прямая.

На координатной прямой отмечено число a . Какое из утверждений относительно этого числа является верным?
В ответе укажите номер правильного варианта.



- 1) $a+4 > 0$
- 2) $a+5 < 0$
- 3) $2-a > 0$
- 4) $3-a < 0$

Задание 8. Степени. Преобразования выражений, содержащих квадратные корни.

Найдите значение выражения $(\sqrt{47} - 5)(\sqrt{47} + 5)$.

Найдите значение выражения $\frac{1}{5^{-3}} \cdot \frac{1}{5^4}$.

Задание 9. Линейные и квадратные уравнения.

Найдите корень уравнения $10(x - 9) = 7$.

Решите уравнение $8x^2 - 10x + 2 = 0$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Задание 13. Неравенства. Системы неравенств.

Решите неравенство $9x - 4(2x + 1) > -8$.

В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $(-4; +\infty)$

2) $(-12; +\infty)$

3) $(-\infty; -4)$

4) $(-\infty; -12)$

Прототипы задания 20.

(№ 324468) Решите уравнение $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 3 = 0$.

(№ 324469) Решите уравнение $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)$.

(№ 324470) Решите уравнение $(x + 2)^4 - 4(x + 2)^2 - 5 = 0$.

(№ 324471) Решите неравенство $\frac{12}{x^2 - 7x - 8} \leq 0$.

(№ 324472) Решите неравенство $\frac{-12}{x^2 - 7x - 8} \leq 0$.

(№ 324474) Решите неравенство $(x-4)^2 < \sqrt{3}(x-4)$.

(№ 324475) Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{2-x}{2+(3-x)^2} \geq 0, \\ 6-9x \leq 31-4x \end{cases}$$
.

(№ 324476) Решите неравенство $(3x-7)^2 \geq (7x-3)^2$.

(№ 324477) Решите неравенство $x^2(-x^2-9) \leq 9(-x^2-9)$.

(№ 324478) Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 7(3x+2) - 3(7x+2) > 2x, \\ (x-4)(x+8) < 0. \end{cases}$$

(№ 324479) Найдите значение выражения $(a^3 - 16a) \cdot \left(\frac{1}{a+4} - \frac{1}{a-4} \right)$ при $a = -45$.

(№ 324480) Найдите значение выражения $\frac{4x-9y}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}} - \sqrt{y}$, если $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$.

(№ 324483) Найдите значение выражения $\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)}$, если

$$p(b) = \left(b + \frac{3}{b} \right) \left(3b + \frac{1}{b} \right).$$

(№ 324484) Найдите значение выражения $61a - 11b + 50$, если $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5} = 9$.

(№ 324486) Решите уравнение $(x + 7)^3 = 49(x + 7)$.

(№ 324487) Решите уравнение $x^3 = 4x^2 + 5x$.

(№ 324489) Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

(№ 324499) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11, \\ 4x^2 + 6y^2 = 11x. \end{cases}$$

(№ 324500) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} (x + 6y)^2 = 7y, \\ (x + 6y)^2 = 7x. \end{cases}$$

Задание 20. (2 балла)

Решите уравнение $(x + 4)^4 - 6(x + 4)^2 - 7 = 0$.

1. Способ введения новой переменной.

$$(x + 4)^4 - 6(x + 4)^2 - 7 = 0$$

Пусть $(x + 4)^2 = t$, тогда

$$t^2 - 6t - 7 = 0$$

$$t_1 = -1, t_2 = 7$$

$$(x + 4)^2 = -1$$

$$x^2 + 8x + 17 = 0$$

$$D < 0$$

Не имеет корней

Ответ: $-4 - \sqrt{7}; -4 + \sqrt{7}$.

$$(x + 4)^2 = 7$$

$$x^2 + 8x + 9 = 0$$

$$D = 28$$

$$x_1 = -4 - \sqrt{7};$$

$$x_2 = -4 + \sqrt{7}$$

2. Разложение на множители.

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 = 9x + 36$.

Решение:

$$\begin{aligned}x^3 + 4x^2 &= 9x + 36 \\x^3 + 4x^2 - 9x - 36 &= 0 \\x^2(x + 4) - 9(x + 4) &= 0 \\(x + 4)(x^2 - 9) &= 0 \\(x + 4)(x - 3)(x + 3) &= 0 \\x_1 = -4; x_2 = 3; x_3 = -3.\end{aligned}$$

Ответ: -4; -3; 3.

3. Решите уравнение $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$.

Решение:

$$x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + \sqrt{3-x} - \sqrt{3-x} - 8 = 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 8 = 0 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -2; x_2 = 4 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Ответ: -2.

4. Решите уравнение $\frac{4}{x-9} + \frac{9}{x-4} = 2.$

Решение:

$$\frac{4}{x-9} + \frac{9}{x-4} = 2$$

$$\frac{4}{x-9} + \frac{9}{x-4} = 2$$

$$\frac{4(x-4) + 9(x-9) - 2(x-4)(x-9)}{(x-9)(x-4)} = 0$$

$$\begin{cases} 4(x-4) + 9(x-9) - 2(x-4)(x-9) = 0 \\ x \neq 4; 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 4; 9 \\ x = 6,5; 13. \end{cases}$$

Ответ: $x = 6,5; 13.$

Решите систему уравнений $\begin{cases} (x - 4)(y - 6) = 0 \\ \frac{y-4}{x+y-8} = 2. \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} (x - 4)(y - 6) = 0 \\ \frac{y-4}{x+y-8} = 2. \end{cases}$

$$(x - 4)(y - 6) = 0$$

$$x = 4; y = 6$$

$$x = 4; \frac{y - 4}{4 + y - 8} = 2$$

$$y - 4 = 2(4 + y - 8); y = 4$$

$$y = 6; \frac{6 - 4}{x + 6 - 8} = 2; x = 3$$

(4;4) – не является решением, так как обращает знаменатель в 0.

Ответ: (3;6).

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = y \\ 3x - 2 = y. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = y \\ 3x - 2 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = 3x - 2 \\ 3x - 2 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = 1 \\ y_1 = 0; y_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; 0\right); (1; 1)$.

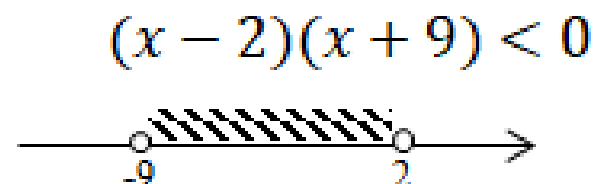
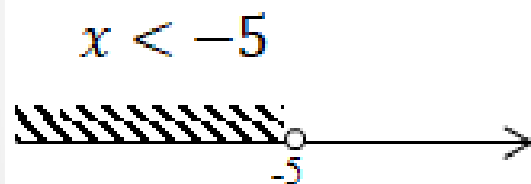
Решите систему неравенств $\begin{cases} 4(9x + 3) - 9(4x + 3) > 3x \\ (x - 2)(x + 9) < 0. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 4(9x + 3) - 9(4x + 3) > 3x; \\ (x - 2)(x + 9) < 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 36x + 12 - 36x - 27 > 3x; \\ (x - 2)(x + 9) < 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x < -5; \\ -9 < x < 2; \end{cases}$$



$$\begin{cases} x < -5 \\ -9 < x < 2 \end{cases}$$



Ответ: $(-9; -5)$.

Алгебраические выражения.

1. Сократите дробь $\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}} &= \frac{(9 \cdot 2)^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}} = \frac{(3^2)^{n+3} \cdot 2^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}} = \frac{3^{2n+6} \cdot 2^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}} = \\ &= 3^{2n+6-(2n+5)} \cdot 2^{n+3-(n-2)} = 3 \cdot 2^5 = 96. \end{aligned}$$

Ответ: 96.

2. Упростите выражение: $\frac{5^{n+1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 5^n}$.

Решение:

$$\frac{5^{n+1} - 5^{n-1}}{2 \cdot 5^n} = \frac{5 \cdot 5^n - \frac{5^n}{5}}{2 \cdot 5^n} = \frac{5^n \left(5 - \frac{1}{5}\right)}{2 \cdot 5^n} = \frac{5^n \cdot 4,8}{2 \cdot 5^n} = 2,4$$

Ответ: 2,4.

3. Найдите значение выражения $\frac{p(a)}{p(6-a)}$, если $p(a) = \frac{a(6-a)}{a-3}$.

$$\frac{p(a)}{p(6-a)} = \frac{a(6-a)}{a-3} \cdot \frac{(6-a)(6-(6-a))}{6-a-3} = \frac{a(6-a)}{a-3} \cdot \frac{-a+3}{(6-a)a} = -1.$$

Ответ: -1.

Критерии оценивания выполнения задания 20.

Баллы	Содержание критерия
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	<i>Максимальный балл</i>

Уточнение – «ошибка вычислительного характера» или «вычислительная ошибка» – это ошибка, допущенная при выполнении сложения, вычитания, умножения и деления. В критериях оценки выполнения задания подчеркивается тот факт, что 1 балл допускается ставить в тех случаях, когда единственная вычислительная ошибка стала причиной того, что неверен ответ.

К вычислительным ошибкам не относятся ошибки в формулах при решении квадратного уравнения, действиях с числами с разными знаками, упрощении выражений со степенями и корнями и т.д.

Пример 1.

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - 10 = 0$.

Ответ: $x = 1,5$, $x = 0,8$.

$$2) \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - 10 = 0; \quad \frac{1}{(x-1)(x-1)} + \frac{3(x-1)}{(x-1)(x-1)} - \frac{10(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-1)} = 0;$$

$$1 + 3(x-1) - 10(x-1)(x-1) = 0, \text{ если } x \neq 1$$

$$1 + 3x - 3 - 10(x-1)^2 = 0;$$

$$-2 + 3x - 10x^2 + 20x - 10 = 0;$$

$$-10x^2 + 23x - 12 = 0 \quad | \cdot (-1);$$

$$10x^2 - 23x + 12 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac; \quad D = 529 - 4 \cdot 10 \cdot 12 = 529 - 480 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{23 + 49}{2 \cdot 10} = \frac{72}{20} = 3,6; \quad x_2 = \frac{23 - 49}{20} = -\frac{26}{20} = -1 \frac{6}{20} = -1,3$$

Ответ: $-1,3$; $3,6$

Пример 2.

Решите уравнение $\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - 12 = 0$.

Ответ: $x = 0,5$, $x = -\frac{1}{6}$.

$$\boxed{21} \quad \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - 12 = 0$$

$$1 + 4x - 12x^2 = 0 \quad \text{ОДЗ: } x \neq 0$$

$$12x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$12x^2 - 6x + 2x - 1 = 0$$

$$(2x - 1)(6x + 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} = 0,5 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{6}$$

Пр.:

✓

✓

Ответ: $0,5$; $-\frac{1}{6}$

Пример 3.

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - 10 = 0$.

Ответ: $x = 1,5$, $x = 0,8$.

$$\textcircled{2.1} \quad \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - 10 = 0$$

1) Пусть $(x-1) = t$, тогда:

$$\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t} - 10 = 0$$

$$\frac{1 + 3t - 10t^2}{t^2} = 0 \quad t^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow -10t^2 + 3t + 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$10t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49$$

$$\sqrt{D} = 7$$

$$t_1 = \frac{3+7}{20} = 0,5$$

$$t_2 = \frac{3-7}{20} = -\frac{1}{5} = -0,2$$

Ответ: $-0,2$ и $0,8$.

2) $(x-1) = t$, следовательно:

$$\bullet x-1 = 0,5$$

$$x = 1,5$$

$$\bullet x-1 = -0,2$$

$$x = 1 - 0,2 = 0,8$$

Решаемость заданий повышенного уровня сложности

% выполнения \ Номер задания	21	22	23	24	25	26
Ожидаемый процент выполнения	30–50	15–30	3–15	30–50	15–30	3–15
Фактический процент выполнения в 2019 году	26,18	16,23	6,82	25,01	3,57	0,48

Решаемость заданий второй части по модулям «Алгебра» и «Геометрия» (%)

Год \ Номер задания	Модуль «Алгебра»			Модуль «Геометрия»		
	21	22	23	24	25	26
2017	28,29	12,04	4,36	27,32	14,58	0,24
2018	11,39	17,36	8,11	7,91	2,65	1,20
2019	26,18	16,23	6,28	25,01	3,57	0,48

Спасибо за внимание!

Источники:

1. Кодификатор проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования и элементов содержания для проведения основного государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ(2021).
2. Методические материалы для предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ 2020 года.
3. Анализ результатов ГИА выпускников 2019 года общеобразовательных организаций Томской области в форме ОГЭ. Информационно-аналитический отчет и методические рекомендации.
4. Сайт ФИПИ.
5. Сайт Решу ОГЭ.