29.10.2020

# Решение задач второй части ОГЭ по математике.

## Задание 20 на преобразование выражений и решение уравнений высших степеней

Лектор
учитель математики и информатики,
первой категории МБОУ РКГ №2 г. Томска,
Мущинкина Оксана Владимировна

Томск 2020

# Направлено на проверку:

**Умения выполнять преобразования алгебраических выражений;**

**Умения решать уравнения, неравенства и их системы.**

# Уметь выполнять преобразования алгебраических выражений:

- основные действия со степенями с целыми показателями, с многочленами и алгебраическими дробями;
- разложение многочленов на множители;
- тождественные преобразования рациональных выражений;
- применять свойства арифметических квадратных корней для преобразования числовых выражений, содержащих квадратные корни.

# Уметь решать уравнения, неравенства и их системы

линейные и квадратные неравенства с одной переменной и их системы

линейные, квадратные уравнения и рациональные уравнения, сводящиеся к ним, системы двух линейных уравнений и несложные нелинейные системы

применять графические представления при решении уравнений, систем, неравенств.

| Баллы | Содержание критерия |
|---|---|
| 2 | Обоснованно получен верный ответ |
| 1 | Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно |
| 0 | Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше |
| 2 | *Максимальный балл* |

# Методы решения уравнений:

| Метод разложения на множители | Метод введения новой переменной | Графический метод |
|---|---|---|
| Способы разложения:<br>• вынесение общего множителя за скобки;<br>• способ группировки;<br>• применение формул сокращенного умножения. | Введение новой переменной позволяет разбить задачу на подзадачи и решить вместо одного сложного уравнения несколько простых. | Привести уравнение к виду $f(x) = g(x)$, где $y = f(x)$ и $y = g(x)$ известные нам функции.<br>В одной системе координат построим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ .<br>Отметим все точки пересечения графиков.<br>Найдем абсциссы точек пресечения – это и есть корни данного уравнения. |

# Способы решения квадратных уравнений:

- разложение левой части уравнения на множители;
- метод выделения полного квадрата;
- решение квадратных уравнений по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ или $$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};$$

- решение уравнений с использованием теоремы Виета (для $x^2+px+q=0$ выполнятся $\begin{cases} x_1\cdot x_2=q, \\ x_1+x_2=-p. \end{cases}$);
- решение уравнений способом «переброски»;
- свойства коэффициентов квадратного уравнения;
- графическое решение квадратного уравнения и т.д.

# Задание 1:

Решите уравнение:

$$(x-2)^4-(x-2)^2-6=0,$$

**Для решения будем использовать:**

Метод введения новой переменной.

Решите уравнение:

$$(x-2)^4-(x-2)^2-6=0,$$

Решение:

1. Пусть $(x-2)^2=t$,

$$t \geq 0,$$

тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-t-6=0.$$

Решаем квадратное уравнение.

Решите уравнение:

$$(x-2)^4-(x-2)^2-6=0$$

## Решение:

2. Решаем квадратное уравнение

$$t^2-t-6=0,$$

где a=1, b= - 1, c= - 6,

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1};$$

$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2};$$

$$t_1=\frac{1-5}{2},\qquad t_2=\frac{1+5}{2};$$

$$t_1=-2,\qquad t_2=3.$$

Решите уравнение:

$$(x-2)^4-(x-2)^2-6=0$$

## Решение:

Решая квадратное уравнение $t^2-t-6=0$ нашли:

$t=-2$ (не удовлетворяет условию,

т.к. $(x-2)^2=-2$ не имеет решение),

$t=3$

3. Вернемся к исходной переменной

$\boxed{(x-2)^2=t}$

$(x-2)^2=3;$

$(x-2)=\pm\sqrt{3};$

$(x-2)=-\sqrt{3}$ и $(x-2)=+\sqrt{3};$

$x_1=2-\sqrt{3}$ и $x_2=2+\sqrt{3}.$

Ответ: $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$

# Решите самостоятельно:

Решите уравнение:

$$(x+4)^4 - 6(x+4)^2 - 7 = 0$$

# Решите самостоятельно:

Решите уравнение:

$$(x+4)^4-6(x+4)^2-7=0$$

Ответ для самопроверки:

$-4-\sqrt{7}; -4+\sqrt{7}$

# Задание 2:

## Решите уравнение:

$$x^4 = (4x - 5)^2$$

Для решения будем использовать:
Метод разложения на множители, с применением формул сокращенного умножения.

Решите уравнение:

$$x^4 = (4x-5)^2$$

## Решение:

1. Исходное уравнение преобразуем:

$(x^2)^{\mathbf{2}} - (4x-5)^{\mathbf{2}} = 0.$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Используя формулу разность квадратов, получаем:

$(x^2 - (4x-5))(x^2 + (4x-5)) = 0;$

$(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4x - 5) = 0;$

2. Решаем получившиеся уравнения:

$(x^2 - 4x + 5) = 0$ или $(x^2 + 4x - 5) = 0;$

Уравнение $(x^2 - 4x + 5) = 0$ не имеет корней,

т.к. $\mathrm{D} = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4,$

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D < 0.$

Решаем уравнение $(x^2 + 4x - 5) = 0;$

Решите уравнение:

$$x^4 = (4x-5)^2$$

## Решение:

Решаем уравнение $(x^2+4x-5)=0$,

где a = 1, b=4, c= - 5, тогда

$\sqrt{D} = \sqrt{b^2-4ac},$ $\sqrt{D} = \sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-5)} = \sqrt{36} = 6,$

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$ $x_{1,2} = \frac{-4\pm6}{2};$

$x_1 = \frac{-4-6}{2},$ $x_2 = \frac{-4+6}{2};$

$x_1 = -5,$ $x_2 = 1.$

Ответ: -5; 1

# Решите самостоятельно:

Решите уравнение:

$$x^4 = (x - 20)^2;$$

Ответ для самопроверки: –5; 4

## Задание 3: Решите уравнение:

$$x^6 = (6x-5)^3$$

## Решение:

1. Исходное уравнение преобразуем:

$(x^2)^3 = (6x-5)^3;$

$x^2 = 6x - 5;$

$x^2 - 6x + 5 = 0;$

2. Решаем получившиеся уравнение: $x^2 - 6x + 5 = 0,$

где a = 1, b = - 6, c = 5,

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16,$

$\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4,$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2 \cdot 1}$;

$x_1 = \frac{6-4}{2}$, $x_2 = \frac{6+4}{2}$;

$x_1 = 1,$ $x_2 = 5.$

Ответ: 1; 5

# Задание 4:

Решите уравнение:

$$(2x-3)^2=(1-2x)^2$$

Решите уравнение:

$$(2x-3)^2 = (1-2x)^2$$

## Решение:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

1. Исходное уравнение преобразуем:

$(2x-3)^2 - (1-2x)^2 = 0.$

2. Используя формулу разность квадратов, получаем:

$\big((2x-3)-(1-2x)\big)\big((2x-3)+(1-2x)\big) = 0;$

$(4x-4)(-2) = 0;$

3. Решаем получившиеся уравнение:

$(4x-4) = 0;$

$4 \cdot (x-1) = 0;$

$(x-1) = 0;$

$x = 1.$

Ответ: 1

# Задание 5:

Решите уравнение:

$$(x-1)(x^2+8x+16)^2 = 6 \cdot (x+4)$$

Решите уравнение:

$$(x-1)(x^2+8x+16)^2 = 6\cdot(x+4)$$

# Решение:

1. Исходное уравнение преобразуем:

$(x-1)(x^2+2\cdot 4\cdot x+4^2)^2 = 6\cdot(x+4);$

$(x-1)(x+4)^2 = 6\cdot(x+4);$

$(a^2+2ab+b^2) = (a+b)^2$

$(x-1)(x+4)^2 - 6\cdot(x+4) = 0;$

2. Вынесем общий множитель за скобки, получаем:

$(x+4)\cdot\left((x-1)(x+4)-6\cdot 1\right) = 0;$

$(x+4)\cdot(x^2+4x-x-4-6) = 0;$

$(x+4)\cdot(x^2+3x-10) = 0;$

$(x+4)$=0 или $(x^2+3x-10) = 0;$

# Решите уравнение:

$$(x-1)(x^2+8x+16)^2 = 6\cdot(x+4)$$

## Решение:

3. Решаем получившиеся уравнения:

$(x+4)=0$ или $(x^2+3x-10)=0;$

$$D = b^2 - 4\cdot a\cdot c$$

$x=-4;$ a = 1, b = 3, c= - 10

$$D = 3^2 - 4\cdot 1\cdot(-10) = 9+40 = 49,$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_{1,2} = \frac{-3\pm 7}{2\cdot 1};$$

$$x_1 = \frac{-3-7}{2\cdot 1}, \qquad x_2 = \frac{-3+7}{2\cdot 1};$$

$$x_1 = -5, \qquad x_2 = 2.$$

Ответ: -5; -4; 2

# Задание 6:

Решите неравенство:

$$(x-5)^2 < \sqrt{7}(x-5)$$

# Решите неравенство: $(x-5)^2 < \sqrt{7}(x-5)$

## Решение:

1. Преобразуем исходное неравенство:

$(x-5)^2 - \sqrt{7}(x-5) < 0;$

2. Вынесем общий множитель за скобки, получаем:

$(x-5)((x-5)-\sqrt{7}) < 0;$

$(x-5)(x-5-\sqrt{7}) < 0;$

3. Произведение двух множителей меньше нуля когда множители имеют разный знак.

Найдем корни множителей, приравняв каждый множитель к нулю:

$x-5=0,$ $\qquad$ $x-5-\sqrt{7}=0;$

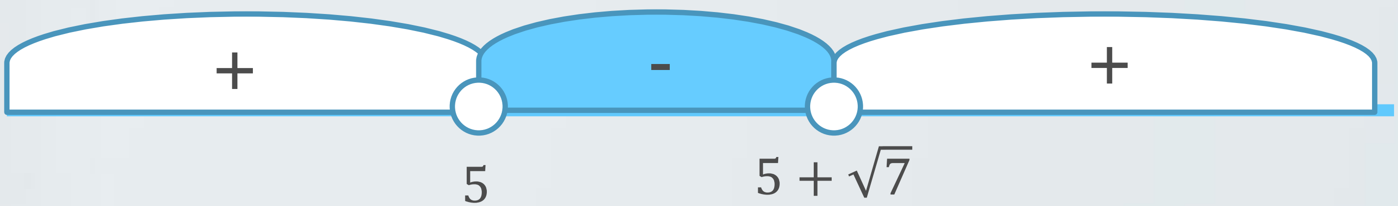
$x=5,$ $\qquad$ $x=5+\sqrt{7}.$

# Решите неравенство: $(x-5)^2 < \sqrt{7}(x-5)$

## Решение:

$(x-5)(x-5-\sqrt{7}) < 0$

4. Наносим корни на числовую ось и определяем знак неравенства на каждом интервале: $x = 5$, $x = 5 + \sqrt{7}$.




Например, при $x = 4$, при $x = 6$, при $x = 10$,

получаем $(4-5)(4-5-\sqrt{7}) > 0$; $(6-5)(6-5-\sqrt{7}) < 0$; $(10-5)(10-5-\sqrt{7}) > 0$;

$(-1)(-1-\sqrt{7}) > 0$; $(1)(1-\sqrt{7}) < 0$; $(5)(5-\sqrt{7}) > 0$;

$(-)(-) > 0$; $(+)(-) < 0$; $(+)(+) > 0$.

Получили решение неравенства $5 < x < 5 + \sqrt{7}$

В ответ запишем промежуток, где выполняется наше данное неравенство:

$x \in (5; 5+\sqrt{7})$.

Ответ: $(5; 5+\sqrt{7})$.

# Решите самостоятельно:

Решите неравенство:

$$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$$

# Решите самостоятельно:

Решите неравенство:

$$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$$

Ответ для самопроверки:

$$\left(7; 7+\sqrt{11}\right)$$

# Задание 7:

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x = y, \\ 2x - 5 = y. \end{cases}$$

# Способы решения систем двух уравнений с двумя неизвестными

- используя теоремы о равносильности систем уравнений первой степени;
- способ подстановки;
- способ алгебраического сложения;
- графический способ;
- способ замены переменных;
- используя формулы Крамера.

# Задание 7:

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x = y, \\ 2x - 5 = y. \end{cases}$$

Для решения будем использовать:

Способ подстановки.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x^2 - 5x = y, \\ 2x - 5 = y. \end{cases}$

# Решение:

1. Правые части уравнений системы равны, значит:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x = y, \\ 2x - 5 = y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x = 2x - 5, \\ 2x - 5 = y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x - 2x + 5 = 0, \\ y = 2x - 5. \end{cases}$$

2. Решим первое уравнение системы:

$2x^2 - 5x - 2x + 5 = 0;$

$2x^2 - 7x + 5 = 0;$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

a = 2, b = - 7, c = 5,

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 - 40 = 9,$ $\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3,$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$ $x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm 3}{2 \cdot 2};$ $x_1 = \frac{7-3}{4},$ $x_2 = \frac{7+3}{4};$

$x_1 = 1,$ $x_2 = 2{,}5$

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x^2 - 5x = y, \\ 2x - 5 = y. \end{cases}$

# Решение:

Решив первое уравнение системы мы получили:

$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2{,}5$

3. Подставим значения х во второе уравнение и получим:

$y = 2x - 5$

При $x_1 = 1$, получаем $y = 2 \cdot 1 - 5$,

получаем $y = -3$.

При $x_1 = 2{,}5$, получаем $y = 2 \cdot 2{,}5 - 5$,

получаем $y = 0$.

Решения системы уравнений: (1;-3) и (2,5;0)

Ответ: (1;-3); (2,5;0)

Решите самостоятельно:

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases}$$

# Решите самостоятельно:

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases}$$

Ответ для самопроверки:

$\left(\frac{2}{3}; 0\right); (1; 1)$

# Задание 8:

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x^2 + y = 9, \\ 8x^2 - y = 3. \end{cases}$$

**Для решения будем использовать:**

Способ алгебраического сложения.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 4x^2 + y = 9, \\ 8x^2 - y = 3 \end{cases}$

## Решение:

1. Сложив два уравнения системы, получаем:

$$+\begin{cases} 4x^2 + y = 9, \\ 8x^2 - y = 3 \end{cases}$$

$$(4 + 8) \cdot x^2 + (1 - 1) \cdot y = 9 + 3;$$

$$12x^2 + 0 \cdot y = 12;$$

$$12x^2 = 12; \qquad /: 12$$

$$x^2 = 1;$$

$x = -1$ или $x = 1$.

Решите систему уравнений: $\begin{cases} 4x^2 + y = 9, \\ 8x^2 - y = 3. \end{cases}$

## Решение:

2. Полученные значения подставим в одно из уравнений системы, например в первое:

при $x = -1$ получаем $4 \cdot (-1)^2 + y = 9,$

$$4 + y = 9;$$
$$y = 9 - 4;$$
$$y = 5,$$

при $x = 1$ получаем $4 \cdot 1^2 + y = 9;$

$$4 + y = 9;$$
$$y = 5.$$

Решения системы уравнений: (-1;5) и (1;5).

Ответ: (-1;5); (1;5).

## Решите самостоятельно:

# Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 6, \\ 4x^2 - y = 1. \end{cases}$$

# Решите самостоятельно:

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 6, \\ 4x^2 - y = 1. \end{cases}$$

Ответ для самопроверки:

$(-1; 3); (1; 3)$

# Задание 9:

Решите уравнение:

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)}-12=0$$

**Для решения будем использовать:**

Метод введения новой переменной.

Решите уравнение: $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)}-12=0$

## Решение:

1. Преобразуем наше уравнение:

$\left(\frac{1}{(x-1)}\right)^2+4\cdot\frac{1}{(x-1)}-12=0;$

2. Пусть $\frac{1}{(x-1)}=t,$ причем $x-1\neq0,$ т.е. $x\neq1.$

тогда уравнение принимает вид: $t^2+4t-12=0.$

3. Решаем квадратное уравнение:

$t^2+4t-12=0;$

а = 1, в = 4, с = -12,

$D=b^2-4\cdot a\cdot c$

$D=4^2-4\cdot1\cdot(-12)=16+48=64,$ $\sqrt{D}=\sqrt{64}=8,$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},$ $t_{1,2}=\frac{-4\pm8}{2\cdot1};$ $t_1=\frac{-4-8}{2},$ $t_2=\frac{-4+8}{2};$

$t_1=$ - 6, $t_2=$ 2

Решите уравнение: $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)} - 12 = 0$

## Решение:

4. Решая квадратное уравнение $t^2+4t-12=0$,
мы получили $t_1 = -6$, $t_2 = 2$

5. Вернемся к исходной переменной x
и подставим значения t.

$\frac{1}{(x-1)} = t$

При t $= -6$, $\frac{1}{(x-1)} = -6$, $(x-1) = -\frac{1}{6}$, $x = -\frac{1}{6} + 1$,

$x = \frac{5}{6}$

При t $= 2$, $\frac{1}{(x-1)} = 2$, $(x-1) = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2} + 1$,

$x = 1{,}5$

Ответ: $\frac{5}{6}$; 1,5

# Решите самостоятельно:

Решите уравнение:

$$\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)} - 6 = 0$$

# Решите самостоятельно:

## Решите уравнение:

$$\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)} - 6 = 0$$

Ответ для самопроверки: $\frac{3}{2}; 2\frac{1}{3}$.

# Задание 10:

Решите уравнение:

$$(x^2 - 9)^2 + (x^2 + x - 6)^2 = 0$$

# Решите уравнение: $(x^2-9)^2+(x^2+x-6)^2=0$

## Решение:

1. Квадрат любого числа неотрицателен.
   Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, если они оба равны нулю одновременно.

$x^2-9=0$ **И** $x^2+x-6=0$

2. Решим каждое уравнение:

$x^2-9=0$ и $x^2+x-6=0;$

$\boxed{D=b^2-4\cdot a\cdot c}$

$x^2=9$

$a=1, b=1, c=-6,$

$x=3$ или $x=-3,$

$D=1^2-4\cdot 1\cdot(-6)=1+24=25$

$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$

$\sqrt{D}=\sqrt{25}=5,$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2\cdot 1};$

$x_1=\frac{-1-5}{2},$ $x_2=\frac{-1+5}{2};$

$x_1=-3,$ $x_2=2.$

## Решите уравнение: $(x^2-9)^2+(x^2+x-6)^2=0$

### Решение:

Из первого уравнения $x^2-9=0$ получили $x=-3$ или $x=3$,
Из второго уравнения $x^2+x-6=0$ получили $x=-3$ или $x=2$.

решению двух уравнений удовлетворяет единственное значение

$x=-3$

$x^2-9=0$ **и**

$x^2+x-6=0$

Ответ: $-3$.

# Решите самостоятельно:

Решите уравнение:

$$(x^2 - 25)^2 + (x^2 + 3x - 10)^2 = 0$$

# Решите самостоятельно:

Решите уравнение:

$$(x^2 - 25)^2 + (x^2 + 3x - 10)^2 = 0$$

Ответ для самопроверки: - 5

# Задание 11:

Решите уравнение:

$$x^2 - 3x + \sqrt{5 - x} = \sqrt{5 - x} + 18$$

Решите уравнение: $x^2 - 3x + \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x} + 18$

## Решение:

1. Исходное уравнение преобразуем:

$$x^2 - 3x + \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x} + 18;$$
$$x^2 - 3x - 18 = \sqrt{5-x} - \sqrt{5-x};$$

Из данного уравнения получаем

$$x^2 - 3x - 18 = 0 \quad \text{и} \quad 5 - x \geq 0$$

2. Решим неравенство и уравнение:

$5 - x \geq 0$ и $x^2 - 3x - 18 = 0;$

$x \leq 5$

$\boxed{D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$

$$\text{a} = 1, b = -3, c = -18,$$
$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 9 + 72 = 81,$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{81} = 9,$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm 9}{2 \cdot 1};$$

$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$

$$x_1 = \frac{3-9}{2}, \qquad x_2 = \frac{3+9}{2};$$
$$x_1 = -3, \qquad x_2 = 6$$

## Другой способ решения уравнения

$$x^2 - 3x - 18 = 0;$$

По теореме Виета:

Сумма корней приведённого квадратного уравнения $x^2 - \mathrm{p}x - \mathrm{q} = 0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение равно свободному члену.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

p = - 3, q = - 18

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 \cdot x_2 = -18. \end{cases}$$

подбираем значения $x_1 = -3$, $x_2 = 6$

Решите уравнение: $x^2 - 3x + \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x} + 18$

## Решение:

Из первого неравенства $5 - x \geq 0$ получили $x \leq 5$,

Из второго уравнения $x^2 - 3x - 18 = 0$ получили $x = -3$ или $x = 6$.

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$
и
$$5 - x \geq 0$$

Решением исходного уравнения

$$x^2 - 3x + \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x} + 18,$$

будет единственное решение $x = -3$ .

Ответ: $-3$.

# Решите самостоятельно:

## Решите уравнение:

$$x^2 - 2x + \sqrt{3 - x} = \sqrt{3 - x} + 8$$

# Решите самостоятельно:

Решите уравнение:

$$x^2 - 2x + \sqrt{3 - x} = \sqrt{3 - x} + 8$$

Ответ для самопроверки: - 2

Спасибо за внимание!