Беспалова Наталья Семёновна,

учитель математики гимназии № 26 г. Томска

Интегрированный урок (практическая работа)

Тема «Нахождение значения числа π методом бросания иглы»

Целевая аудитория: 11 класс (информационно-технологический профиль; физико-математический профиль)

Цель урока: разработка и апробирование математической и информационной модели по нахождению значений числа π. Познакомиться с историей появления числа π.

Задачи урока:

- создать информационную и математическую модель числа π;
- спроектировать и разработать компьютерный эксперимент по вычислению числа π.

Оборудование: компьютеры, учебник алгебры.

Сценарий урока

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА УРОКА – 90 МИНУТ (2 УРОКА)

№ п/п	Структурные элементы	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	ТСО (технические средства обучения) и ПО (программное обеспечение)	Временная реализация
1	Организа ционный момент.	Проверка готовности класса к уроку.	Готовятся к уроку		2 мин.
2	Целевая установка (введение «в проблему урока». (презентация)	Выход в Web пространство. Сообщение формы проведения урока, темы и разъяснение целей урока.	Восприятие разъяснений учителя..	**ТСО**: Интерактивная доска «Smart Board». Периферийные устройства: колонки, WEB – камера, наушники. Ноутбук. **ПО**: Microsoft office-2010; Mira polis.	3 мин.
3	Введение. Актуальность данной темы и её	1.Учитель задаёт вопросы.	Устная работа – ответы, обсуждение,	**ТСО:** Интерактивная доска «Smart Board» WEB – камера	7 мин.

	значи мость в современ ном мире. (презентация)	2.Историческая справка числа $\boldsymbol{\pi}$	доказательство.	**ПО:** Microsoft office-2010, Mira polis	
4	Составление математической модели нахождения числа $\boldsymbol{\pi}$	Объяснение работы в программной среде. Разъяснение условий выполнения проектного задания.	Восприятие. Смысловая деятельность. Предлагают алгоритм мат. модели	Маркерная доска. Учебник алгебры. Сеть интернет. Поисковые системы.	23 мин
5	Работа в программной оболочке (Созданная учителем программная оболочка (см. Приложение1)	Индивиду альные консультации обучающим ся	Изучение учебного материала. Выполнение заданий. Анализ полученных экспериментальн ых данных Применение теоретического материала. Поиск и обработка материалов исследования.	**ТСО:** Персональные компьютеры Периферийные устройства. **ПО:** Mira polis, учителя:.	25 мин
7	Оформление практической работы	Коррекция ответов.	Самопроверка.	**ТСО:** Интерактивная доска «Smart Board» Периферийные устройства **ПО:** Mira polis,:	20 мин.
8	Итоги урока.	Вопросы обучающим ся. Общий анализ.	Ответы на поставленные вопросы. Рефлексия знаний (отзывы урока).	**ТСО:** Интерактивная доска «Smart Board» Периферийные устройства **ПО:** Microsoft office-2010, Mira polis.	2 мин.

9	Задание на дом.	Сообщение домашнего задания.	Восприятие. Запись домашнего задания.	**ТСО:** Интерактивная доска «Smart Board» Периферийные устройства **ПО:** Microsoft office-2010, Mira polis.	2 мин.
10	Выставление отметок и их устное обоснова ние.	Анализ работы обучающих ся.	Самоанализ знаний.		5 мин.
11	(Звонок с урока).	Проверка рабочих мест, ПК.			1 мин.

Ход уроков

Изучение числа π — задача, интересующая математиков на протяжении нескольких тысячелетий. В работе мы попытались кратко изложить историю вычислений числа π, начиная от Архимеда и заканчивая новейшими сверхэффективными технологиями на основе программированной среды Delphi 7.0, затронем некоторые проблемы связанных с этим числом, которых пока остаются нерешёнными.

Большинство из нас будут удивлены, узнав, что многие люди занимаются числом π, – ведь в школе на нелюбимой многими геометрии уяснили, что это отношение длины окружности к диаметру, что тут может быть еще интересного? Но, познакомившись поближе, мы будем удивлены еще больше, ибо история человечества предстанет нам как интригующая череда усилий величайших умов по уточнению знаков числа Пи и поисков алгоритмов для этого. Знакомство с числом предлагаем провести в виде проектно исследовательской работы.

Целью данной работы является: разработать и апробировать математическую и компьютерную модель по нахождению значений числа π. Познакомиться с историей появления числа π.

Для выполнения заданной цели были поставлены следующие **задачи:**

- создать информационную и математическую модель числа π;
- спроектировать и разработать компьютерный эксперимент по вычислению числа π.

Все знают, что длина окружности больше её диаметра в одно и то же, не зависящее от самой окружности, число раз. К этому выводу можно прийти, задавшись вопросом: почему все окружности похожи друг на друга? Для похожих, или, как говорят математики, подобных фигур естественно предположить пропорциональность их линейных размеров. Так, для двух произвольных окружностей с длинами C1 и C_2 и диаметрами d_1 и d_2 соответственно мы вправе ожидать выполнение равенства C1 = $d1$. По свойству пропорции отсюда получаем C1 = $C2$. Осталось только обозначить последнее отношение $^{d}1$ $^{d}2$ буквой π и заключить, что длина C произвольной окружности диаметра d может быть вычислена по формуле $C = \pi d$. Конечно же, эти рассуждения носят лишь правдоподобный характер, поскольку основываются на интуитивном представлении о длине окружности.

Историческая справка

То, что отношение длины окружности к её диаметру постоянно, было известно ещё в глубокой древности. Первое обозначение этого числа греческой буквой π содержится в работе «Synopsis Palmoriorum Matheseos» («Обозрение достижений математики») английского преподавателя Уильяма Джонса (1675—1749), вышедшей в 1706 году. Обозначение π для отношения длины окружности к диаметру широко распространилось после того, как его стал использовать в своих трудах Леонард Эйлер (1707—1783).

Вычисление числа π методом «Бросание иглы» и методом «иглы Бюффона»

Самый оригинальный и неожиданный способ для приближённого вычисления числа π состоит в следующем. Запасаются короткой (сантиметра два) швейной иглой – лучше с отломанным остриём, чтобы игла была равномерной толщины, - и проводят на листе бумаги ряд тонких параллельных линий, отделённых одна от другой расстоянием вдвое больше длины иглы. Затем роняют с некоторой (произвольной) высоты иглу на бумагу и замечают, пересекает ли игла одну из линий или нет. Чтобы игла не подпрыгивала, подкладывают под бумажный лист пропускную бумагу или сукно. Бросание иглы повторяют много раз, например сто или, ещё лучше, тысячу, каждый раз отмечая, было ли пересечение. Если потом разделить общее число падений иглы на число случаев, когда замечено было пересечение, то в результате должно получиться число π, конечно, более или менее приближённо.

Объясним, почему так получается. Пусть вероятнейшее число пересечений иглы равно K, а длина нашей иглы – 20 мм. В случае пересечения точка встречи должна, конечно, лежать на каком-либо из этих миллиметров, и ни один из них, ни одна часть иглы, не имеет в этом отношении никаких преимуществ перед другим. Поэтому вероятнейшее число пересечений каждого отдельного миллиметра равно K/20. Для участка иглы в 3 мм оно равно 3K/20, для участка в 11 мм – 11K/20 и т. д. Иначе говоря, вероятнейшее число пересечений прямо пропорционально длине иглы.

Эта пропорциональность сохраняется и в том случае, если игла согнута. Пусть игла согнута в форме фигуры II (рис.1). Причём участок AB=11 мм, BC=9 мм. Для части AB вероятнейшее число пересечений равно 11K/20, а для BC равно 9K/20, для всей же иглы 11K/20 + 9K/20, т. е. по-прежнему равно K. Мы можем изогнуть иглу и более затейливым образом (фигура III), – число пересечений от этого не изменилось бы. (Заметьте, что при изогнутой игле возможны пересечения черты двумя и более частями иглы сразу; такое пересечение надо, конечно, считать за 2, за 3 и т. д., потому что первое зачислялось при подсчёте пересечений для одной части иглы, второе – для другой и т. д.)

Вообразите теперь, что мы бросаем иглу, изогнутую в форме окружности с диаметром, равным расстоянию между чертами (оно вдвое больше, чем наша игла). Такое кольцо каждый раз должно дважды пересечь какую-нибудь черту (или по одному разу коснуться двух линий, - во всяком случае, получается две встречи). Если общее число бросаний N, то число встреч – 2N. Наша прямая игла меньше этого кольца по длине во столько раз, во сколько полудиаметр меньше длины окружности, т. е. в 2 π раз. Но мы уже установили, что вероятнейшее число пересечений пропорционально длине иглы. Поэтому вероятнейшее число (К) пересечений нашей иглы должно быть меньше 2N в 2 π раз, т. е. равно N/ π. Отсюда π = число бросаний/число пересечений.

Чем большее число падений наблюдалось, тем точнее получается выражение для π. Один швейцарский астроном, Р. Вольф в середине прошлого века наблюдал 5000 падений иглы на разграфленную бумагу и получил в качестве π число 3,159… - выражение, впрочем, менее точное, чем архимедово число.

Как видите, отношение длины окружности к диаметру находят здесь опытным путём, причём – это всего любопытнее – не чертят ни круга, ни диаметра, т. е. обходятся без циркуля. Человек, не имеющий никакого представления о геометрии и даже о круге, может, тем не менее, определить по этому способу число π, если терпеливо проделает весьма большое число бросаний иглы.

Предполагаемый результат:

Вычислить и уточнить число π методом «Бросание иглы» и методом «Иглы Бюффона» используя программную среду Delphi 7.0;

Практическая работа

Нахождение значения числа π

используя программно – ориентированную среду Delphi 7.0

Техническая задача

Вычислить и уточнить число π методом «иглы Бюффона».

Цели моделирования

Вычисление и уточнение числа π.

Задачи

- изучить математическую модель метода «иглы Бюффона»;
- закрепить умение моделировать последовательности случайных чисел в Delphi;

- создать компьютерную модель метода «иглы Бюффона»;
- исследовать, как точность вычисления числа π зависит от числа испытаний;
- оформить построенную компьютерную модель согласно Правилам описания компьютерной модели, реализованной в Delphi.

Инструмент исследования

Среда визуального программирования Delphi.

Математическая модель

Метод *«иглы Бюффона»* является первым экспериментальным методом уточнения числа π (18 век). Метод основывается на вероятностном методе Монте-Карло.

На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость произвольно бросается игла длины $2l$, $2l < 2a$ так, что игла либо не пересекает прямые, либо пересекает одну прямую (рис. 11.1).

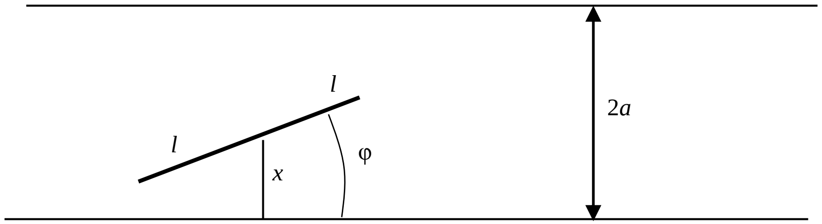

Рис. 11.1. Задача Бюффона

Положение иглы (отрезка) на плоскости можно задать точкой (x, φ), где x – положение середины отрезка, $x \in [0, a]$, φ – угол наклона иглы к прямой, $\varphi \in [0, \pi]$. Обозначим Ω – множество точек (x, φ), которые случайным образом определяют положение отрезка на плоскости:

$$\Omega \overset{\text{обозн}}{=} \{(x, \varphi) : 0 \le x \le a, 0 \le \varphi \le \pi\}.$$

Если игла (отрезок) пересекает ближайшую прямую, то координаты точки $(x, \varphi) \in \Omega$ удовлетворяют неравенству:

$$x \le l \sin(\varphi). \qquad (1)$$

Обозначим A – множество точек, при которых отрезок пересекает какую-то прямую $A^{\text{обозн}} = \{(x,\varphi) : x \le l\sin(\varphi)\}$. Множества Ω и A

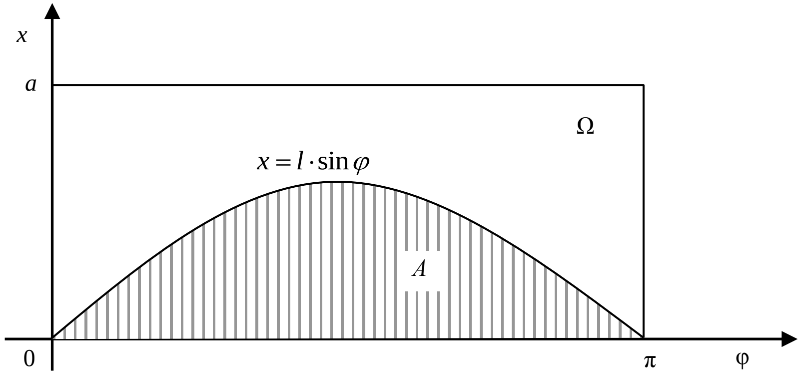

Рис. 11.2. Множества Ω и A

изображены на рис. 11.2.

Пусть N – количество точек множества Ω (точек, которые случайным образом определяют положение отрезка на плоскости), M – количество точек множества A (точек, при которых отрезок пересекает какую-то прямую). Согласно методу Монте-Карло (см. лабораторную работу № 10) можно записать соотношение:

$$\frac{M}{N} = \frac{S_A}{S_\Omega}, \qquad (2)$$

где S_A – площадь множества A, S_Ω – площадь множества Ω.

Множество Ω является прямоугольником, и его площадь вычисляется по формуле:

$$S_\Omega = a\pi. \qquad (3)$$

Площадь множества A вычисляется по формуле:

$$S(A) = \int_0^\pi l\sin\varphi d\varphi = -l\cos\varphi\Big|_0^\pi = 2l \qquad (4)$$

.

Таким образом, соотношение (2) можно записать в виде:

$$\frac{M}{N} = \frac{2l}{a\pi}. \qquad (5)$$

Из соотношения (5) легко получить формулу для вычисления числа ПИ:

$$\pi = \frac{2l}{a} \cdot \frac{N}{M}. \qquad (6)$$

Формула (6) представляет собой математическую модель вычисления числа ПИ методом «*иглы Бюффона*».

Ход исследования

Рис. 11.3. Примерный вид интерфейса

1. *Компьютерная модель*.

1.1. Определите начальные параметры модели:

Длина иглы, $2l =$ (задаётся любая);

Расстояние между параллельными прямыми, причем $2l < 2a$, $2a =$ (задаётся любое);

Число испытаний, $N =$ (задаётся любое);

1.2. Постройте блок-схему вычисления числа π методом «иглы Бюффона».

1.3. Создайте компьютерную модель, вычисляющую число π методом «иглы Бюффона» » (примерный вид интерфейса показан на рис. 11.3)

2. *Компьютерный эксперимент* №1.

2.1. Вычислите 10 раз число π при $N = 10000$, $N = 1000$, $N = 100$. Результаты занесите в табл. 11.1.

2.2. Рассчитайте среднее арифметическое $\text{ПИ}_{N=10000}$, $\text{ПИ}_{N=1000}$, $\text{ПИ}_{N=100}$.

Вывод экспериментальной задачи

В вычислении числа Пи методом иглы Бюффона большое значение имеет число испытаний. Чем больше испытаний, тем меньше погрешность вычисления. Например, при 10000 испытаниях погрешность вычисления примерно 0,003. При 1000 испытаниях уже 0,043, а при 100 и вовсе 0,208.

Домашнее задание

- доказать теорему «Периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше одной седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых диаметра» и тем самым получить Архимедово число π.
- доработать программную оболочку программированной среды Delphi 7.0, чтобы она выдавала

Итог урока

Хочу отметить, что в литературе нет точного вычисления числа π. Проделанные мной два независимых эксперимента по различным методикам вычисление и уточнение числа π методом «Бросание иглы» и методом «Иглы Бюффона» показывают так же различные значение π, поэтому данная тема была и остается быть актуальной в наше время. Проектно – исследовательская работа по выбранной теме имеет своё продолжение. В следующем учебном году планирую:

Итак, как мы смогли убедиться математика и информатика - это уж не такие абстрактные науки. Они находят, и будут находить своё применение.

Список источников

1. Белов, А.С., Тихомиров В.С. Сложность алгоритмов // Квант.1999. № 2. С. 8—11.

2. Болл, У.Д., Коксетер, Г.М. Математические эссе и развлечения. — М.: Мир, 1986.

3. Борвейн, Д.Ж., Борвейн, П.А., Рамануджани число π //В мире науки. 1988. № 4. С. 58—66.

4. Гарднер, М.Е. Математические головоломки и развлечения.— М.:Мир, 1971.

5. Звонкин, А.В. Что такое π? // Квант. 1978. № 11. С. 28—31.

6. Крановер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. — М.: Постмаркет, 2000.

7. О квадратуре круга. С приложением теории вопроса. /Составил Ф. Рудио под редакцией и с примечаниями академика Бернштейна, С. Н., — М.—Л.: ГТТИ, 1934.

8. Розенфельд, Б. А., Яглом, И. М. Неевклидовы геометрии // Энциклопедия элементарной математики. Т. 5: Геометрия. — М.: Наука, 1966. — С. 433—439.

9. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. — М.: Наука, 1969.

10. Хинчин, А. Я. Цепные дроби. — М.: Наука, 1978.

11. Хрестоматия по истории математики. / Под ред. Юшкевича, А. П. — М.: Просвещение, 1976.

Интернет источники:

1. http://www.algonet.se/~eliasb/pi/binpi.html
2. http://www.cs.unb.ca/~alopez-o/math-faq/mathtext/node12.html
3. http://www.geom.umn.edu/huberty/math5337/groupe.